Feuille de TD n°24 : équations différentielles linéaires

MP Clemenceau

Mars 2025

1 Banque CCP

Exercice 1 : 31 banque CCINP

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''+y=\cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Exercice 2 : 32 banque CCINP
Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$ avec $r>0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Exercice 3 : 42 banque CCINP
On considère les deux équations suivantes :
$2xy'-3y=0 \quad (H)$
$2xy'-3y=\sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0,+\infty[$?

2 Exercices

Exercice 4 :
Résoudre les équations suivantes, on précisera le ou les intervalles d'étude et les solutions maximales (sur le plus grand intervalle possible quitte à faire des recollements)

1) $(e^x-1).y'=(e^x+1).y$
2) $x.\left(1-x^2\right).y'+(2.x-1).y=a.x^2$, $a\in\mathbb{R}$
3) $y'.\cos(x)+y.\sin(x)=1+x$
4) $\left(1+x^2\right)^2.y'+2x.y=x.e^{\frac{1}{1+x^2}}$

Exercice 5 : Même question en utilisant un changement d'inconnue :

1) $y'=3.\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^3}{x^5}$, en posant $y=z(x).x^n$, avec n fixé correctement choisi
2) $2.x.e^y.y'+e^y-x^2=0$

Exercice 6 : Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les fonctions continues a et b (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), pour que l'équation différentielle $y'+a.y=b$ admette deux solutions y_1 et y_2 sur $\mathbb{R}$, telles qu'il existe $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha_1.y_1+\alpha_2.y_2=1$

Exercice 7 : Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivalbes telles que

$$\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R}, \qquad f'(x)=f(x)+\int_0^1 f(t).dt \\ \qquad\qquad f(0)=1 \end{cases}$$

Exercice 8 : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

Exercice 9 : Soient $a, b \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $a \circ b = b \circ a$.
En considérant pour $x_0 \in E$, l'application $t \mapsto (\exp(ta) \circ \exp(tb))x_0$, établir

$$\exp(a+b) = \exp(a) \circ \exp(b)$$

Exercice 10 : Résoudre les système différentiels suivant :

a) $\begin{cases} x' = \cos(t)\,x + \sin(t)\,y \\ y' = -\sin(t)\,x + \cos(t)\,y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - e^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + e^t \end{cases}$

Exercice 11 : On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on identifie $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- A est antisymétrique ;
- chaque solution du système différentiel $Y' = AY$ est de norme constante.

Exercice 12 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2) Trouver son polynôme minimal.
En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression simple de $exp(tA)$.

3) résoudre le système differentiel $X' = AX$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Exercice 13 :
Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Exercice 14 : Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

1) Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe un unique g de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $g' + ag = f$ et $g(0) = b$.

2) Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, g l'est également.
Donner la relation entre $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} g(t)\,dt$.

Exercice 15 : x, y, z sont des fonctions de t. Résoudre les systèmes :

a) $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$

Exercice 16 : Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x - ty + 3t \end{cases}$

Exercice 17 :
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall\, x \in R,\ f''(x) + f(-x) = x\cos(x)$.

Exercice 18 : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$
Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\Phi : E \to E$ l'application qui à f associe la fonction g définie par $g(t) = f'(t) + tf(t)$

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

2) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.

3) Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Exercice 19 : Trouver les solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1+t^2}}$$

Exercice 20 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}_{a,b}) \quad x^2y'' + axy' + by = 0$$

où x est la variable et y la fonction inconnue de variable x.

1) Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ suivant les valeurs de (a, b) en cherchant des solutions de la forme $y(x) = x^\alpha$.

2) Retrouver les résultats obtenus en faisant le changement de variable $t = \ln(x)$.

3) Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 21 :

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

a) $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$

b) $4xy'' + 2y' - y = 0$

c) $x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1$

d) $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

Exercice 22 : Soit a une fonction continue non nulle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y'' + a(t)y = 0$ s'annule.

Exercice 23 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $x^2.y'' - 2.x.y' + 2.y = x^4 \cos(x) - 1$

2) $x^2.y'' + 6.x.y' + 4.y = \frac{1}{1+2.x}$

3) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$

Exercice 24 : Résoudre l'équation différentielle suivante, sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \to e^{ax}$

$$(2x+1)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8y = 0$$

Exercice 25 : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f''(x) \geq 0$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.

Exercice 26 : Lemme de Gronwall :

Soient f et g deux fonctions continues et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \geqslant 0, \quad g(t) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f(t) \leqslant a + \int_0^t f(u)g(u)\,du$$

Montrer : $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant a \exp\left(\int_0^t g(u)\right)\,du$.

Exercice 27 : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geqslant f(x) + \dfrac{2}{ch^3(x)}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geqslant \dfrac{sh^2(x)}{ch(x)}$

Exercice 28 : Zéros entrelacés

Soient r et q deux fonction continues définies sur $I = [a, b]$ telles que : $\forall x \in I,\ r(x) \geqslant q(x)$.

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\ y'' + qy = 0 \quad , \quad (E_2)\ z'' + rz = 0$$

1) Soit y une solution de (E_1), x_0 et x_1 deux zéros consécutifs de y.
$y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ?
Que peut-on dire de leurs signes ?

2) Soit z une solution de (E_2). On considère $W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$.
Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.

3) Montrer que z possède un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.

4) Soit u une solution de (E_1). Montrer que u est soit proportionnelle à y, soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.