Feuille de TD n°22 : Calcul différentiel, compléments

MP Clemenceau 2024-25

Mars 2025

Exercice 1 :
Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = \sin(\pi xy)\,\mathrm{e}^{2x^2y-1}$, au point $(1, \frac{1}{2}, 1)$

Exercice 2 :
Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$, au point $(1, 3, 3)$

Exercice 3 :
Trouver les points sur le paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan d'équation $x + 2y + z = 6$.
Même question avec le plan d'équation $3x + 5y - 2z = 3$.

Exercice 4 : Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ et P un plan d'équation $ux + vy + wz = 1$. Montrer que P est tangent à E si et seulement si $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1$.

Exercice 5 : Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et Σ la surface définies par :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = f(r, \theta) \end{cases}$$

Déterminer pour tout point régulier de Σ, l'intersection de (Oz) et du plan tangent en ce point.

Exercice 6 : Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

1) A quelle condition l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan $z = k$ contient-elle une droite ?

2) Déterminer les droites incluses dans $\mathcal{S}$ non parallèles à (xOy).

3) Montrer que celles-ci sont coplanaires.

4) Déterminer le plan tangent à $\mathcal{S}$ en chacun des points d'intersection de ces droites deux à deux ?

Exercice 7 : Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x + y + z$ et $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Déterminer les extrema de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 1$.

Exercice 8 : Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par $f(x, y, z, t) = x^4 + y^4 + z^4 + t^4$. On pose $\mathcal{C} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 1, x - y + z - t = 1\}$.

1) Montrer que f admet un unique point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.

2) Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^4 + (2 - x)^4 \geqslant 2$.

3) En déduire les extrema globaux éventuels de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.