

Feuille de TD n°20

MP Lycée Clemenceau

Février 2025

Complément sur les endomorphismes d'espaces euclidiens

Exercice 1 :

Soit u un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée $\mathcal{B}$.

- 1) Montrer que $U^t U$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $\text{vect}(u)$.
- 2) Trouver la matrice de la symétrie associée.

Exercice 2 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer a, b, c de sorte que f soit une isométrie, et la préciser.

Exercice 3 : Comatrice d'une matrice symétrique

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que $\text{com}(M)$ est aussi symétrique. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 : Soient p, q deux projecteurs orthogonaux.

- 1) Montrer que $p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.
- 2) Montrer que $(\text{Im}(p) + \ker(q))^\perp \oplus (\ker(p) \cap \text{Im}(q)) = E$.
- 3) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 5 : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2$.

Continuité des fonctions de plusieurs variables

Exercice 6 : Etudier la limite en $(0, 0)$ des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = \frac{x \cdot y \cdot (x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{c) } f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \\ \text{b) } f(x, y) = \frac{\sin(x) \sin(y) - \sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{d) } f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^4}} \end{array}$$

Exercice 7 : Etudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x^3}{y} \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{x + 2y}{x^2 - y^2} \quad \text{c) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$$

Exercice 8 : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est continue.