

Feuille de TD n°20

MP Clemenceau

Mars 2023

1 Banque CCP

Exercice 1 : 31 banque CCINP

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
- Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Exercice 2 : 32 banque CCINP

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

- Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de \mathbb{R} avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
- Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$?

Exercice 3 : 42 banque CCINP

On considère les deux équations suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

- Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

2 Exercices

Exercice 4 : Résoudre les système différentiels suivant :

$$\text{a) } \begin{cases} x' = \cos(t)x + \sin(t)y \\ y' = -\sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - e^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + e^t \end{cases}$$

Exercice 5 : On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique et on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est antisymétrique ;
- chaque solution du système différentiel $Y' = AY$ est de norme constante.

Exercice 6 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Trouver son polynôme minimal.
En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression simple de $\exp(tA)$.
- résoudre le système différentiel $X' = AX$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Exercice 7 :

Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$ admet une et une seule solution π -périodique.

Exercice 8 : Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

- 1) Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe un unique g de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $g' + ag = f$ et $g(0) = b$.
- 2) Montrer que si f est intégrable sur \mathbb{R}^+ , g l'est également.

Donner la relation entre $\int_{t=0}^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{t=0}^{+\infty} g(t) dt$.

Exercice 9 : x, y, z sont des fonctions de t . Résoudre les systèmes :

$$\text{a) } \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice 10 : Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} (t^2 + 1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2 + 1)y' = x - ty + 3t \end{cases}$

Exercice 11 :

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos(x)$.

Exercice 12 : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\Phi : E \rightarrow E$ l'application qui à f associe la fonction g définie par $g(t) = f'(t) + tf(t)$

- 1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ .
- 2) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2 .
- 3) Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Exercice 13 : Trouver les solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1+t^2}}$$

Exercice 14 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_{a,b}) \quad x^2 y'' + axy' + by = 0$$

où x est la variable et y la fonction inconnue de variable x .

- 1) Résoudre l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* suivant les valeurs de (a, b) en cherchant des solutions de la forme $y(x) = x^\alpha$.
- 2) Retrouver les résultats obtenus en faisant le changement de variable $t = \ln(x)$.
- 3) Résoudre l'équation différentielle sur \mathbb{R}_-^* .

Exercice 15 :

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0 & \text{c) } x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1 \\ \text{b) } 4xy'' + 2y' - y = 0 & \text{d) } x(x - 1)y'' + 3xy' + y = 0 \end{array}$$

Exercice 16 : Soit a une fonction continue non nulle de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y'' + a(t)y = 0$ s'annule.

Exercice 17 : Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f''(x) \geq 0$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

Exercice 18 : Lemme de Gronwall :

Soient f et g deux fonctions continues et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(t) \leq a + \int_0^t f(u)g(u) du$$

Montrer : $\forall t \geq 0, f(t) \leq a \exp\left(\int_0^t g(u) du\right)$.

Exercice 19 : Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq f(x) + \frac{2}{ch^3(x)}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq \frac{sh^2(x)}{ch(x)}$

Exercice 20 : Zéros entrelacés

Soient r et q deux fonction continues définies sur $I = [a, b]$ telles que : $\forall x \in I, r(x) \geq q(x)$.

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) y'' + qy = 0 \quad , \quad (E_2) z'' + rz = 0$$

- 1) Soit y une solution de (E_1) , x_0 et x_1 deux zéros consécutifs de y .
 $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ?
Que peut-on dire de leurs signes ?
- 2) Soit z une solution de (E_2) . On considère $W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$.
Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.
- 3) Montrer que z possède un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.
- 4) Soit u une solution de (E_1) . Montrer que u est soit proportionnelle à y , soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.