Feuille de TD n°19bis

MP Lycée Clemenceau

Mars 2023

<u>Exercice 1 :</u> Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0,1,1) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial 7}(0,1,1) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 3$.

Calculer $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t^2, \operatorname{ch} t, e^t)}{f(t, \cos t, \operatorname{ch} t)}$?

<u>Exercice 2 :</u> Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $g : x \mapsto x \wedge f(x)$.

Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

<u>Exercice 3 :</u> Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. On définit f sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{\|(x_1, \cdots, x_n)\|} \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1-i}$$

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en $0 = (0, \cdots, 0)$.

2) L'application ainsi prolongée est-elle différentiable en 0 ?

<u>Exercice 4 :</u> Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\right\}$. On recherche toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in D \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

1) Vérifier que $\varphi : (x,y) \mapsto \dfrac{y}{x}$ est solution du problème.

2) Soit $g \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$, montrer que $g \circ \varphi$ est solution de l'équation.

3) Soit f une solution, montrer que $f(u, uv)$ ne dépend pas de v.

4) Donner l'ensemble des solutions.