Feuille de TD n°19

MP Lycée Clemenceau

Mars 2023

1 Banque CCP

Exercice 1 : 33 banque CCINP On pose : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0)=0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 2 : 41 banque CCINP Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f:(x,y)\mapsto 4x^2+12xy-y^2$.
Soit $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2=13\right\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. Soit $(u,v)\in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
   (a) Justifier, avec un théorème de votre programme, qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié : $\begin{cases}4u+6v=\lambda u\\ 6u-v=\lambda v\end{cases}$.
   (b) Montrer que $(\lambda-4)(\lambda+1)-36=0$.
   En déduire les valeurs possibles de λ.
3. Déterminer les valeurs possibles de (u,v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

Exercice 3 : 52 banque CCINP
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Prouver que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 : 57 banque CCINP

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 : 58 banque CCINP

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

   Donner la définition de « f différentiable en a ».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
   On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$ où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.
   On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

   (a) Prouver que $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ /\ \forall\, (x,y) \in E \times E,\ |B(x,y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Exercice 6 : 29 banque CCINP
On pose : $\forall\, x \in]0, +\infty[$ et $\forall\, t \in]0, +\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 7 : 30 banque CCINP

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

   (b) Résoudre (E) .

Exercice 8 : 50 banque CCINP
On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t} dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Exercices

Exercice 9 : Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 10 :

1) Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe M^3.
Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser sa différentielle en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Mêmes questions pour $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à M associe $\mathrm{tr}(M^4)$.

3) Mêmes questions pour $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à M associe $\det(M)$.

Exercice 11 : Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,dt$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice 12 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln\left(x^2+y^2\right) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0$$

1) Etudier la continuité de f.

2) Sans les calculer, montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les dérivées partielles premières en (x,y) existent et vérifient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$

3) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

4) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 13 : Soit f l'application de $\mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe M^{-1}.

Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ et que, pour $A \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$, on a $df(A) : M \mapsto -A^{-1}MA^{-1}$

Exercice 14 :

Soit $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x,y) = \arctan x - \arctan y$.

1) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.

3) Simplifier f à l'aide de g.

Exercice 15 : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions g et h suivantes :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(z,x,y) \end{array} \quad , \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(2x+y-z, -x+y+2z, x+y+z) \end{array}$$

Calculer les dérivées partielles premières de g et h en fonctions de celles de f.

Exercice 16 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

2) A l'aide de l'étude en $(0,0)$ montrer qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 17 :

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie pour la norme $\| \|_2$.

1) Montrer que la matrice jacobienne de φ est constante, égale à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la partie linéaire de φ.

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que $(\Delta f) \circ \varphi = \Delta(f \circ \varphi)$.

Exercice 18 :

Soient $u, v, f, g\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ liées par la relation :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)).$$

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de g.

Exercice 19 : On pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, et $g_\theta : r \mapsto f\left(r\cos(\theta), r\sin(theta)\right)$
Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.

3) Calculer $f(x, x^2)$. Conclure.

Exercice 20 : Calculer les extremums des fonctions suivantes :

1) $f : (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$

2) $f : (x, y) \mapsto -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$

3) $f : (x, y) \mapsto x^2y^2\,(1 + 3x + 2y)$

4) $f : (x, y) \mapsto x\left(\ln^2(x) + y^2\right)$, pour $x > 0$.

Exercice 21 : Distances aux sommets d'un triangle

Soit $A \in \mathbb{R}^p$ fixé et $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & AM^2 \end{array}\right.$ $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & AM \end{array}\right.$ (distance euclidienne)

1) Calculer les gradients de f et g en un point M.

2) Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Trouver les points M du plan réalisant le minimum de :

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

b) $MA + MB + MC$.

c) $MA \times MB \times MC$.

Exercice 22 :

On considère un vrai triangle ABC et f la fonction définie par : $f(M) = d(M, AB) \times d(M, AC) \times d(M, BC)$. Montrer que f admet un maximum à l'intérieur du triangle ABC, et caractériser géométriquement le point M_0 où f est maximale.

Exercice 23 :

Trouver les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4f$.

Exercice 24 : Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 4f$$

avec la condition aux limites : $f(t, t) = t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 25 : Résoudre sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en posant $\left\{\begin{array}{l} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{array}\right.$

Exercice 26 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0\}$. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où f est une fonction inconnue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq \beta$. On fait le changement de variables : $u = x + \alpha y$, $y = x + \beta y$.

1) Ecrire l'équation aux dérivées partielles obtenue après le changement de variables.

2) En déduire que l'on peut ramener l'équation de départ à l'une des trois formes réduites suivantes :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$$

Exercice 27 :

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)g(x - t)\,dt$.

1) Montrer que φ est continue et que si g est de classe $\mathscr{C}^k$, alors φ l'est aussi.

2) Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^1$ (et g continue), alors φ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 28 : Soit $I(\alpha) = \displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1 + x}\,dx$. Montrer que $I(\alpha)$ existe et définit une fonction de classe ^{1} sur $]0, 1[$. Écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série.

Exercice 29 : On pose $I(x) = \displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)\,dt$.

1) Montrer que I est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Calculer $I'(x)$ et en déduire $I(x)$.

Exercice 30 :

On considère les fonctions définies par : $f(x) = \left(\int_{t=0}^{x} e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et $g(x) = \int_{t=0}^{1} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1) Montrer que f et g sont dérivables et calculer f' et g'.

2) Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

3) En déduire la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 31 : On pose

$$z : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+ix)t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que z est définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x)$

2) En déduire l'expression de $z(x)$ sachant $z(0) = \sqrt{\pi}/2$.