Feuille de TD n°18 : espaces préhilbertiens réels

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2025

Banque CCINP

Exercice : Exercice 76 banque CCINP Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}\left([a,b]\,,\mathbb{R}\right),\ \forall\, x \in [a,b]\ \ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice : Exercice 79 banque CCINP
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice : Exercice 92 banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A\,,B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$ où tr désigne la trace et $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\ ,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\top = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.

Exercice : Exercice 77 banque CCINP
Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

<u>Exercice :</u> Exercice 80 banque CCINP
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

<u>Exercice :</u> Exercice 81 banque CCINP
On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^{\top} A'\right)$, où $\operatorname{tr}\left(A^{\top} A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice $A^{\top}$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

<u>Exercice :</u> Exercice 82 banque CCINP
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercices

<u>Exercice 1 :</u> Soit E un espace préhilbertien réel.

1) Etablir que pour tout sous-espace vectoriel F de E, $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$.

Désormais, on suppose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Montrer que $H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \displaystyle\int_{-1}^{1} |t|\, P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ est un hyperplan fermé de E.

3) Soit $Q \in H^{\perp}$. Etablir que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-1}^{1} |t|\, P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

4) Etablir que $H^{\perp} = \{0\}$ et conclure qu'ici l'inclusion $\overline{H} \subset H^{\perp\perp}$ est stricte.

Exercice 2 : Soient $e = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $f = (f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (f_i \mid u(e_j))^2$$

Montrer que A ne dépend pas des bases orthonormales choisies

Exercice 3 : Soient E un espace préhilbertien réel, et n un entier non nul. On considère la famille $(e_1, .., e_n)$ de vecteurs de E vérifiant

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, .., n\}, \quad \|e_i\| = 1 \\ \forall x \in E, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)^2 = \|x\|^2 \end{cases}$$

Montrer que $(e_1, .., e_n)$ est une base orthonormale de E

Exercice 4 : Les polynômes de Tchébychev.

On considère $E = \mathbb{R}[X]$

1) Montrer que l'application suivante est correctement définie et est un produit scalaire :

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\, g(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

2) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1] \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

En déduire que T_n est la restriction à $[-1, 1]$ d'un polynôme de degré n. Préciser son coefficient dominant.

3) Démontrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.

4) U étant l'ensemble des polynômes de E de degré p et normalisés, calculer $\inf\limits_{P \in U} \|P\|$

Exercice 5 : Dans $\big(E, (\ \mid\ )\big)$ espace euclidien, on considère $a \in E$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
Résoudre $\alpha \left(x \mid x\right) + \beta \left(x \mid a\right) + \gamma = 0$

Exercice 6 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $(P, Q) \in E^2$ on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

1) Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire.

2) Déterminer une base de E orthonormée pour ce produit scalaire, notée (P_0, P_1, P_2), telle que, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, $deg(P_i) = i$.

3) Déterminer une base orthonormée telle que les polynômes qui la composent sont tous de degré 2.

Exercice 7 : Déterminant de Gram

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leq \dim(E)$. On considère $(u_1, ..., u_n) \in E^n$ et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale directe d'un sous-espace orienté de E contenant les vecteurs $u_1, ..., u_n$.

On note A la matrice de la famille de vecteurs (u_i) dans la base $\mathscr{B}$ et $G(u_1, ..., u_n)$ la matrice $((u_i|u_j))_{1=i,j=n}$, appelée matrice de Gram de la famille (u_i).

1) Montrer que $G(u_1, ..., u_n) = A^\top A$.
En déduire, lorsque $n = \dim(E)$, la propriété du produit mixte : $[u_1, ..., u_n]^2 = \det(G(u_1, ..., u_n))$

2) Montrer que $rg(A) = rg(A^\top A)$.
En déduire que $rg(u_1, ..., u_n) = rg(G(u_1, ..., u_n))$.

3) Soit F un sous-espace vectoriel strict de E muni d'une base $(b_1, ..., b_p)$ et v un vecteur de E. Montrer que la distance d de v à F est donnée par :

$$d_2 = \frac{\det(G(b_1, ..., b_p, v))}{\det(G(b_1, ...b_p))}$$

Exercice 8 : Soient E un espace préhilbertien réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, .., x_n) \in E^n$.

1) Montrer que

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2$$

2) On suppose que, pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geqslant 2$. Soit B une boule fermée de rayon R contenant x_1, .., x_n.

Montrer que $R \geqslant \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{n}}$.

Exercice 9 : Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si, $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$

Exercice 10 : Inégalité de Ptolémée

Soit E un espace euclidien.

1) Pour $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

Montrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \dfrac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.

2) Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in E$. Montrer que $\|\vec{a} - \vec{c}\|\,\|\vec{b} - \vec{d}\| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|\,\|\vec{c} - \vec{d}\| + \|\vec{b} - \vec{c}\|\,\|\vec{a} - \vec{d}\|$.

Exercice 11 : Expression analytique

Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_4)$ une base orthonormée de E, et F le sous espace vectoriel d'équations dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

1) Trouver une base orthonormée de F.

2) Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.

3) Calculer $d(\vec{e}_1, F)$.

Exercice 12 : Soit A le matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Montrer que l'application suivante définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{array}{cccc} \varphi & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & {}^tXAY \end{array}$$

Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ muni de ce produit scalaire.

Exercice 13 : Dire à quelles conditions les applications suivantes sont des produits scalaires :

a) $E = \mathbb{R}^2$, $((x, x') \mid (y, y')) = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$

b) $E = \mathbb{R}^n$, $((x_1, \ldots, x_n) \mid (y_1, \ldots, y_n)) = a \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + b \sum_{i \neq j} x_i y_j$

Exercice 14 : Soient $(E, (. \mid .))$ et $(F, \langle ., . \rangle)$ deux espaces euclidiens, soit f une application de E dans F, vérifiant

$$\begin{cases} & f(0) = 0 \\ \forall (x, y) \in E^2 & \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E \end{cases}$$

Montrer que cette application est linéaire.

Exercice 15 : On considère dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, le sous espace F, défini par

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

Donner, dans la base canonique, la matrice de la projection orthogonale sur F, en déduire celle de la symétrie orthogonale par rapport à F

Exercice 16 : Soit $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :

$$\left(f \mid g\right) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose

$$F = \{f \in E / \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{g \in E / \forall t \in [0,1], g(t) = 0\}$$

1) Montrer que $F^{\perp} = G$

2) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 17 : Soit S l'ensemble des vecteurs de norme 1 d'un espace préhilbertien réel. Montrer l'implication suivante :

$$\forall (x,y) \in S^2, x \neq y \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, (1-\lambda)x + \lambda y \notin S$$