Feuille de TD n°17bis

MP Lycée Clemenceau

Mars 2023

Exercice 1 :

a) Une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p est une loi sans mémoire, c'est à dire :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbf{P}\left(X > n+k | X > n\right) = \mathbf{P}\left(X > k\right)$$

On a de plus $\mathbf{P}\left(X > k\right) = (1-p)^k$.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $P(X = n+1) > 0$ et $\mathbf{P}(X > k+n | X > k) = \mathbf{P}(X > n)$. Alors X suit une loi géométrique de paramètre $\mathbf{P}_X(1)$.

Exercice 2 : Séries dans je jeu de pile ou face infini

On lance une infinité de fois une pièce ayant une probabilité $p \in]0,1[$ de donner pile, les lancers étant mutuellement indépendants. Si $\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}}$, on décompose ω en sous-suites de résultats consécutifs identiques, appelés *séries,* le résultat changeant d'une série à la suivante et on note $L_1(\omega), L_2(\omega), \dots$ les longueurs de ces séries. Par exemple, si $\omega = FFFPFPPPPFP\dots$, on a $L_1(\omega) = 3$, $L_2(\omega) = 1$, $L_3(\omega) = 1$, $L_4(\omega) = 4, L_5(\omega) = 1$. Les fonctions $L_1, L_2, \dots$ sont bien définies sur le sous-ensemble Ω' de $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites comportant une infinité de P et une infinité de F.

1) Prouver que Ω' est un évènement et que $\mathbf{P}\left(\Omega'\right) = 1$.
Dans la suite de l'exercice, on se place dans l'espace probabilisé constitué de Ω', des évènements inclus dans Ω' et de la restriction de $\mathbf{P}\left(\right)$ à ces évènements. On admet que $L_1, L_2, \dots$ sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

2) Déterminer la loi de L_1 et son espérance.

3) Déterminer la loi conjointe de (L_1, L_2). En déduire la loi de L_1 et son espérance.

4) Expliquer pourquoi L_1 et L_2 n'ont pas même loi. L_1, L_2 sont-elles indépendantes ?

5) Montrer que L_3 a même loi que L_l, et que L_1, L_3 ne sont pas indépendantes si $p \neq \frac{1}{2}$.

Exercice 3 : Temps d'attente

Au jeu de pile ou face infini avec une pièce équilibrée, on considère les variables aléatoires T_{XY} = nombre de lancers jusqu'à obtenir la séquence XY où $(X, Y) \in \{P, F\}^2$.

1) Déterminer les lois et les espérances de $T_{PP}, T_{PF}, T_{FP}, T_{FF}$.

2) Calculer $\mathbf{P}\left(T_{PP} > T_{PF}\right)$ et $\mathbf{P}\left(T_{PP} > T_{FP}\right)$.

3) Déterminer les lois de T_{PPF} et T_{FPP} en fonction de la loi de T_{PP} et leurs espérances.

4) Calculer $\mathbf{P}\left(T_{PPF} > T_{FPP}\right)$.

Exercice 4 : Loi décomposable Soit X une variable aléatoire à valeurs dans N. On dit que X est décomposable s'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z à valeurs dans N non presque sûrement constantes telles que $Y+Z$ ait même loi que X.

1) Si X est décomposable, donner une relation entre G_X, G_Y, G_Z.

2) Soient $n \geqslant 2$ et $p \in]0,1[$. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, montrer que X est décomposable.

3) Soit $n \geqslant 2$ non premier. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. Montrer qu'il existe $(r,s) \in \mathbb{N} \setminus [\![0,1]\!]$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \left(\sum_{i=0}^{r-1} t^i\right) \times \left(\sum_{i=0}^{s-1} t^{ri}\right)$.
En déduire que X est décomposable.

4) On suppose que $n \geqslant 3$ est premier. Soit X suivant une loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. Montrer que X n'est pas décomposable.