Feuille de TD n°17 : séries génératrices

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2025

Banque CCINP

Exercice : 96 Banque CCINP

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$.

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Démontrer que $\forall t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:

   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E[t^X]$.

   Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t \in]-1, 1[$.
   Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Exercice : 110 Banque CCINP

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R \geqslant 1$.
   On pose alors $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercices

Exercice 1 : On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $1-p$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1) Reconnaître la loi de X lorsque $m=1$.

2) Déterminer la loi de X dans le cas général $m \in \mathbb{N}^\star$.

3) Exprimer le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-t)^{m+1}}$$

4) Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire l'espérance de X.

Exercice 2 : Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et Y_1 et Y_2 celles associées au deuxième joueur. On étudie donc l'évènement $(X_1+X_2=Y_1+Y_2)$.

1) Montrer que

$$P\left(X_1+X_2=Y_1+Y_2\right)=P\left(14+X_1+X_2-Y_1-Y_2=14\right)$$

2) Déterminer la fonction génératrice de la variable à valeurs naturelles

$$Z=14+X_1+X_2-Y_1-Y_2$$

3) En déduire la valeur de $P\left(X_1+X_2=Y_1+Y_2\right)$

Exercice 3 : Soit N et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose $S=\sum_{k=1}^{N} X_k$

1) Établir $G_S(t)=G_N\big(G_X(t)\big)$ pour $|t| \leq 1$

2) On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald

$$\mathbf{E}(S)=\mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1)$$

Exercice 4 : Une urne contient 4 boules rapportant $0,1,1,2$ points. On y effectue n tirages avec remise et l'on note S le score total obtenu.
Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire la loi de S.

Exercice 5 : Loi décomposable Soit X une variable aléatoire à valeurs dans N. On dit que X est décomposable s'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z à valeurs dans N non presque sûrement constantes telles que $Y+Z$ ait même loi que X.

1) Si X est décomposable, donner une relation entre G_X, G_Y, G_Z.

2) Soient $n \geqslant 2$ et $p \in]0,1[$. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, montrer que X est décomposable.

3) Soit $n \geqslant 2$ non premier. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. Montrer qu'il existe $(r,s) \in \mathbb{N} \setminus [\![0,1]\!]$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t)=\left(\sum_{i=0}^{r-1} t^i\right) \times \left(\sum_{i=0}^{s-1} t^{ri}\right)$.
En déduire que X est décomposable.

4) On suppose que $n \geqslant 3$ est premier. Soit X suivant une loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. Montrer que X n'est pas décomposable.