Feuille de TD n°17 : endomorphismes d'espaces euclidiens

MP Clemenceau 2023-24

Janvier 2024

1 Banque CCINP

Exercice : 63 banque CCINP

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $(\ |\ )$.

On pose pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\big(u(x) \mid x\big) = 0$, est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
   Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $u \circ u^* = u^* \circ u$
   ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\big(u(x) \mid v(x)\big) = \big(u^*(x) \mid v^*(x)\big)$
   iii) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice : 66 babque CCINP

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff {}^{(}A) \in [0, +\infty[$
2. Prouver que pour tout $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$
3. Prouver que pour tout $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Rightarrow A^2B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$
4. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice : 78 banque CCINP

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.

On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2$ $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

2 Exercices

Exercice 1 : ★

Soit $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n \geq 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

On suppose

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \big(x_i \mid x_j\big) < 0$$

Montrer que toute sous famille de $n - 1$ vecteurs de $\_F$ est libre.

Exercice 2 : Décomposition QR : soit A une matrice carrée réelle inversible d'ordre n. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}$ telle que $A = QR$.

Exercice 3 : Montrer que la matrice $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une projection orthogonale sur un plan dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel.

Exercice 4 : Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+2y-z=0$.

Exercice 5 :

1) Soit $\big(E,(\,|\,)\big)$ un espace vectoriel euclidien et f une application de E dans E vérifiant :

$$\forall (x,y)\in E^2 \quad \big(f(x)\mid f(y)\big)=\big(x\mid y\big)$$

Montrer que f est une application linéaire.

2) Soit $\big(E,(\,|\,)\big)$ un espace vectoriel euclidien et f une application de E dans E vérifiant :

$$\forall (x,y)\in E^2 \quad \|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$$

Montrer que l'application $x\mapsto f(x)-f(0)$ est une application linéaire.

Exercice 6 :

Soit E un espace euclidien et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f\circ f^*=f^*\circ f$ et $f^2=-Id$. Montrer que f est orthogonal.

Exercice 7 : On définit l'application $\varphi : A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mapsto \sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2$. Trouvez les matrices $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout A on ait $\varphi(P^{-1}AP)=\varphi(A)$.

Exercice 8 : Centre de $\mathscr{O}(E)$

Soient E un espace euclidien, $f\in\mathscr{O}(E)$ et s une réflexion par rapport à un hyperplan H. Soit $u?H^\perp$, $u?0$.

1) Montrer que $f\circ s\circ f^{-1}$ est aussi une symétrie et en donner la base.

2) En déduire que f et s commutent si et seulement si u est vecteur propre de f.

3) Quel est le centre de $\mathscr{O}(E)$?

Exercice 9 : Somme des coefficients d'une matrice orthogonale

Soit $P\in\mathscr{O}(n)$. démontrer que : $\left|\sum\limits_{i,j} P_{ij}\right|\leqslant n$.

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 10 : Déterminer les matrices de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

Exercice 11 : Déterminer la nature de l'endomorphisme définit sur l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$, par la matrice (dans la base canonique)

$$A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&6&-3\\6&3&2\\-3&2&6\end{pmatrix}$$

Exercice 12 : Même question avec les matrices suivantes

$$-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7&4&4\\-4&8&-1\\4&1&-8\end{pmatrix}\qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-2&2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos(t)&-\sin(t)&0\\ \sin(t).\cos(t)&\cos^2(t)&-\sin(t)\\ \sin^2(t)&\sin(t).\cos(t)&\cos(t)\end{pmatrix}\qquad t\in\,]0,\pi[$$

Exercice 13 : Soient R et R' deux rotations de $\mathbb{R}^3$, déterminer l'application défine par

$$f=R^{-1}\circ R'\circ R$$

Exercice 14 : Trouver la matrice, dans la base canonique orienté directe usuelle de $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'axe dirigé par $\omega=\frac{1}{3}(2,-2,-1)$ et d'angle θ, donné par les relations $\cos(\theta)=\frac{4}{5}$ et $\sin(\theta)=\frac{3}{4}$.

Exercice 15 : ★

1) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est une matrice symétrique.
Montrer que $Sp(A)\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ \ {}^tXAX>0$

2) Soient f_1, .., f_n des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. on suppose que ces fonctions sont de carrés intégrables sur I. On pose $a_{i,j} = \displaystyle\int_I f_i f_j$.

Montrer que la matrice $(a_{i,j})$ est définie positive si et seulement si la famille $(f_i)_{i\in[1,n]}$ est libre.

3) En déduire que si $\lambda_1, .., \lambda_n$ sont des réels strictement positifs distincts deux à deux alors la matrice de terme général $\dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$ est définie positive.

<u>Exercice 16 :</u> ★

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,dt$$

2) Établir que A est de degré n.

<u>Exercice 17 :</u> Soit $\big(E, (\,|\,)\big)$ un espace vectoriel euclidien et (a, b) une famille libre de vecteurs de E. On considère l'application f de E dans E définie par $f : x \mapsto \big(x \mid a\big)\, b + \big(x \mid b\big)\, a$.

1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

2) Donner les éléments propres de f.

<u>Exercice 18 :</u> Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Après avoir justifier qu'elle est diagonalisable donner les éléments propres de A.

<u>Exercice 19 :</u> Soit $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & a \\ -2 & 6 & b \\ 3 & c & d \end{pmatrix}$.

Trouver a, b, c et d pour que $A \in SO_3\,(\mathbb{R})$.

<u>Exercice 20 :</u> Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on note $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a+1 & b & a \\ b & 2a+1 & b \\ a & b & a+1 \end{pmatrix}$ et $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M_{a,b}$.

On note $G = \left\{f_{a,b}/(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

1) Calculer $\det(f_{a,b})$.

2) Trouver a et b pour que $f_{a,b}$ soit un projecteur orthogonal et donner ses éléments caractéristiques.

3) Quelles sont les isométries qui sont éléments de G ?
Les identifier.
Montrer qu'elles forment un groupe pour la loi $\circ$.

<u>Exercice 21 :</u> Soit $\big(E, (\,|\,)\big)$ un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathscr{S}(E)$. On note $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les valeurs propres de f classées dans l'ordre croissant.

Montrer que pour tout $x \in E$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \big(f(x) \mid x\big) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$.

<u>Exercice 22 :</u> ★ **Transformation de Cayley**

1) Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?

2) Soit

$$\varphi : A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

Montrer que φ réalise une bijection de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sur

$$\{\Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin Sp(\Omega)\}$$

<u>Exercice 23 :</u> ★ On note $\big(.\mid.\big)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Pour toute famille $u = (u_1, \ldots, u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ on pose

$$M_u = \big(\big(u_i \mid u_j\big)\big)_{1\leq i,j\leq p}$$

1) Montrer que la famille $(u_1, \ldots u_p)$ est libre si, et seulement si, M_u est inversible.

2) On suppose qu'il existe $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$ telles que $M_u = M_v$.
Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(u_i) = f(v_i)$ pour tout i.

Exercice 24 : $\star$
Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 1. On considère $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $tr(u) = 0$.

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul, tel que $\big(u(x) \bigm| x\big) = 0$.

2) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale nulle.

Exercice 25 : Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ dans $\mathbb{R}^n$ et $(U_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ dans $\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^n$ tels que

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad U_k^\top U_k = 1 \quad \text{et} \quad S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i U_i^\top$$