Feuille de TD n°17

MP Lycée Clemenceau

Février 2023

Banque CCP

Exercice 1 : 96 Banque CCINP

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ converge et $\forall x \in \left]-1,1\right[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in \left]0,1\right[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t=1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 2 : 97 Banque CCINP

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $P((X,Y)=(j,k)) = \dfrac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 3 : 99 Banque CCINP

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in \left]0,+\infty\right[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** :
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

Exercice 4 : 100 Banque CCINP

Soit $\lambda \in \left]0,+\infty\right[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

<u>Exercice 5 :</u> 102 Banque CCINP

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$.
   c'est à dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

<u>Exercice 6 :</u> 103 Banque CCINP

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

<u>Exercice 7 :</u> 106 Banque CCINP

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}, P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

<u>Exercice 8 :</u> 108 Banque CCINP

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\,(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 9 : 109 Banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 10 : 110 Banque CCINP

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R \geqslant 1$.
   On pose alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice 11 : 111 Banque CCINP

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}, \sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in \left]-1, 1\right[, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in \left]0, 1\right[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.

   (b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.

   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

Exercices

Exercice 12 : Soit $p \in]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un promeneur se déplace sur un axe d'origine O. Il part de O et, à chaque pas, il lance une pièce de monnaie. S'il obtient pile (et ce avec une probabilité p), il avance d'un pas. Sinon, il recule d'un pas. Soit X la variable aléatoire égale à l'abscisse du promeneur après son n-ième pas. Soit X_1 (resp. X_2) le nombre de pas effectué vers l'avant (resp. vers l'arrière).

1) Déterminer les lois de X, X_1, X_2, et en déduire l'espérance de X.

2) Calculer la variance de X.

Exercice 13 : On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité 1/2, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert. . .).
Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
- il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1) On suppose la fortune du joueur infinie.
Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.

2) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?

3) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n?1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties.
Que devient son espérance de gain ?

Exercice 14 : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a, b]$.

1) Montrer que X admet une espérance m et que celle-ci est élément de $[a, b]$.
La variable X admet aussi une variance σ^2 que l'on se propose de majorer.
On introduit la variable aléatoire $Y = X - m$ et les quantités

$$t = \sum_{y \geqslant 0} yP(Y = y),\ s = \sum_{y \geqslant 0} y^2 P(Y = y) \text{ et } u = P(Y \geqslant 0)$$

2) Vérifier que $t^2 \leqslant su$

3) Calculer espérance et variance de Y. En déduire que $t^2 \leqslant (\sigma^2 - s)(1 - u)$

4) En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir $t^2 \leqslant \sigma^2/4$

5) Conclure $\sigma^2 \leqslant (b - a)^2/4$

Exercice 15 : Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP((X = k)) = \sum_{k=0}^{n-1} P((X > k)) - nP((X > n))$.

2) En déduire que, si X admet une espérance, alors : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P((X > k))$.

3) Montrer de même que, si X admet une variance, alors : $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (2k + 1)P((X > k))$.

4) Dans cette question, on suppose que l'on dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On y effectue n tirages successifs d'une boule avec remise, et on note X le plus grand numéro obtenu.
   (a) Calculer l'espérance de X et préciser la loi de X.
   (b) Déterminer un équivalent de $E(X)$ à n fixé quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 16 : Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire au hasard une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne et on y ajoute une nouvelle boule de cette même couleur. On tire à nouveau au hasard une boule, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne avec une nouvelle boule de cette même couleur, et ainsi de suite. Les tirages successifs sont supposés mutuellement indépendants. Soit X_n le nombre de boules blanches tirées au cours de n premiers tirages. Déterminer la loi de X_n.

Exercice 17 : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega) \quad \text{et} \quad P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1 - p)^{k-n}$$

1) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p. Montrer que $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.

2) En déduire l'espérance et la variance d'une loi binomiale négatives de paramètres n et p.

Exercice 18 : Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côtés les dés correspondants et relance les autres. Il note X_2 le nombre de 6 obtenus et répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $(suite_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ la variable $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ correspond alors un nombre de 6 obtenu après n lancers.

1) Vérifier que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.

3) On définit alors la variable aléatoire

$$T = \min \{n \in \mathbb{N}^*, S_n = N\} \cup \{+\infty\}$$

Déterminer la loi de T.

4) Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci. Calculer cette espérance pour $N = 1$ et $N = 2$.

Exercice 19 : Loi de Zipf

Soit $a \in]1, +\infty[$. On définit le réel

$$\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

1) Démontrer qu'on peut définir une probabilité P_a sur $\mathbb{N}^*$ à l'aide des réels :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad p_k = \frac{1}{\zeta(a)k^a}$$

Cette probabilité est appelée loi de Zipf de paramètre a.

Cette loi a été introduite par le mathématicien Georges Zipf pour rendre compte de la fréquence d'apparition d'un mot dans une langue donnée.

On considère désormais l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), P_a)$.

2) Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $A_m = m\mathbb{N} = \{km, k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $P_a(m\mathbb{N})$.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux entiers i et j pour que A_i et A_j soient indépendants

4) *(Application)* On note p_i le i ième nombre premier et C_n l'ensemble des entiers divisibles par aucun des nombres p_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.

(a) Calculer $P_a(C_n)$

(b) Déterminer , $\bigcap_{n \geqslant 1} C_n$

(c) En déduire le développement eulérien de la fonction ζ :

$$\forall a > 1 \quad \zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}$$

Exercice 20 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Donner la loi de $Z = X + Y$ dans les cas suivants :

1) $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda \neq \mu$

2) $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$, avec $p \neq q$

Exercice 21 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$. Déterminer la loi de X sachant que $(X + Y = n)$.

Exercice 22 : Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois respectives $\mathscr{G}(p_1)$ et $\mathscr{G}(p_2)$.

1) Calculer $P(X_1 \geqslant k)$ et $P(X_2 \geqslant k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

2) Calculer la probabilité des événements $(X_1 \leqslant X_2)$ et $(X_2 \leqslant X_1)$.

3) On pose $M = \min(X_1, X_2)$. Calculer $P(M \geqslant m)$ pour $m \in M(\Omega)$. En déduire la loi de M.

4) Retrouver la loi de M par un raisonnement direct.

5) Démontrer que la loi de X_1 sachant $(X_1 \leqslant X_2)$, la loi de X_2 sachant $(X_2 \leqslant X_1)$ et la loi de M sont identiques. Interprétation ?

Exercice 23 : Inégalité de Jensen

Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable, convexe. On suppose que X et $f(X)$ admettent toutes deux une espérance.

1) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f'(E(X))(x - E(X)) + f(E(X))$$

2) En déduire l'inégalité de Jensen :
$$f(E(X)) \leqslant E(f(X))$$

Exercice 24 : Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire réelle indépendante de X suivant la loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

1) Donner la loi, l'espérance et la variance de $Z = XY$.

2) Calculer la probabilité que Z soit paire.

Exercice 25 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = X_k X_{k+1}$.

1) Donner la loi de Y_k, ainsi que l'espérance et la variance de Y_k.

2) Soient i et j deux entiers naturels distincts. Discuter, suivant les valeurs de i et j, de l'indépendance de Y_i et Y_j.
Déterminer $cov(Y_i, Y_j)$.

3) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
Calculer l'espérance et la variance de Z_n.

4) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|Z_n - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 26 : On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $1 - p$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1) Reconnaître la loi de X lorsque $m = 1$.

2) Déterminer la loi de X dans le cas général $m \in \mathbb{N}^\star$.

3) Exprimer le développement en série entière de
$$\frac{1}{(1-t)^{m+1}}$$

4) Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire l'espérance de X.

Exercice 27 : Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et Y_1 et Y_2 celles associées au deuxième joueur. On étudie donc l'évènement $(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$.

1) Montrer que
$$P(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2) = P(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14)$$

2) Déterminer la fonction génératrice de la variable à valeurs naturelles
$$Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$$

3) En déduire la valeur de $P(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$

Exercice 28 : Soit N et $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables $X_1, X_2, \ldots$ suivent toutes une même loi de fonction génératrice G_X et on pose $S = \sum\limits_{k=1}^{N} X_k$

1) Établir $G_S(t) = G_N\big(G_X(t)\big)$ pour $|t| \leq 1$

2) On suppose que les variables admettent une espérance. Établir l'identité de Wald

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1)$$

Exercice 29 : Une urne contient 4 boules rapportant $0, 1, 1, 2$ points. On y effectue n tirages avec remise et l'on note S le score total obtenu.
Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire la loi de S.

Avec Python

Exercice 30 :

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Pour n entier non nul, on note

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \text{ et } V_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \text{ avec } m = \mathbb{E}(U_1) \text{ et } \sigma = \sqrt{\mathbb{V}(U_1)}$$

Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega)$ fini. On pose $\forall t \in \mathbb{R} \qquad M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.

Pour les simulations informatiques sous python, on importera les bibliothèques scientifiques avec les alias suivants :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.polynomial import Polynomial
```

1) Préciser $\mathbb{E}(U_1)$, $\mathbb{V}(U_1)$ et une expression de la fonction génératrice G_{U_1}.

2) Exprimer la fonction génératrice G_{S_n} en fonction de G_{U_1}.

3) L'exemple suivant construit le polynôme $(\sum_{k=1}^{4} X^k)^3$:

```
P=[0]+[1]*4
P=Polynomial(P)**3 #P=(X+...+X4̂)3̂
```

Tester ces instructions.
Dans ce qui suit, on fixe $N = 10$.

4) Pour t réel, donner une expression sommatoire (qu'on ne cherchera pas à simplifier) de $M_{V_n}(t)$ en fonction de la loi de S_n.

5) Pour $t \in \{1/3, 1/2, 7/8\}$, représenter les termes de la suite $(M_{V_{10n}}(t))_{n\in[1,10]}$.
Que peut-on conjecturer ?

6) Démontrer la conjecture faite à la question précédente.

7) Illustrer ce résultat en représentant le graphe de $t \mapsto M_{V_{100}}(t)$ pour $t \in [0, 1]$ simultanément avec un autre graphe à préciser.

Exercice 31 : Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ pour n entier non nul.

Pour les simulations informatiques, on importera les bibliothèques scientifiques avec les alias suivants :

```
 import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

1) Préciser la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2) Déterminer une expression sommatoire (que l'on ne cherchera pas à simplifier) de $\mathbb{P}\left(S_n < \frac{n}{2}\right)$.

3) Écrire en langage python une fonction `binom(n,k)` qui calcule le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$.

4) Écrire en langage python une fonction `sn2(n)` qui calcule $\mathbb{P}\left(S_n < \frac{n}{2}\right)$.

5) Pour $n \geq 1$, on note $u_n = \mathbb{P}\left(S_n < \frac{n}{2}\right)$. Répresenter les termes de la suite $(u_{20k})_{\in[\![1,100]\!]}$. Que peut-on conjecturer ?

6) Pour $n \geq 1$, on note $v_n = \mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{n}{2}\right)$. Établir l'égalité

$$\forall n \geq 1 \qquad v_n = u_n + \mathbb{P}\left(S_n = \frac{n}{2}\right)$$

7) En déduire une démonstration du résultat observé à la question 5.

8) On note $w_n = \mathbb{P}(S_{2n} = n)$ pour $n \geq 1$. En considérant $\ln\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right)$, retrouver le résultat précédent sans utiliser l'équivalent de Stirling.