Feuille de TD n°16

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2025

Banque CCINP

<u>Exercice :</u> 2 banque CCINP

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière en 0 sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

<u>Exercice :</u> 19 banque CCINP

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence. Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

   (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle :

   $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe :

   $z \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$

   (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.

   (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe :

   $z \longmapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$

<u>Exercice :</u> 20 banque CCINP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$

   (c) $\sum \cos n z^n$

<u>Exercice :</u> 21 banque CCINP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

<u>Exercice :</u> 22 banque CCINP

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction
   $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x)+\ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x=\dfrac{1}{4}$? $x=\dfrac{1}{2}$? $x=-\dfrac{1}{2}$?.
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

<u>Exercice :</u> 23 banque CCINP

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.

<u>Exercice :</u> 24 banque CCINP

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction $x\mapsto \mathrm{ch}(x)$ et précisez le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(0)=1,\quad f(x)=\mathrm{ch}\sqrt{x}\ \text{pour}\ x>0,\quad f(x)=\cos\sqrt{-x}\ \text{pour}\ x<0\ .$$
   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice :</u> 32 banque CCINP

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$ avec $r>0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

<u>Exercice :</u> 47 banque CCINP

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} &= 4^n \\ a_{2n+1} &= 5^{n+1} \end{cases}$.

<u>Exercice :</u> 51 banque CCINP

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Exercices

Exercice 1 : Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n x^n$ réelle a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors la somme admet une limite infinie en $-R^+$ ou en R^-

Exercice 2 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ dont les coefficients sont définis de la façon suivante :

a) $a_n = \sum_{d|n} d^2$

b) $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.

c) $a_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(3k-2)}{n!}$

d) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$

e) $a_n = \dfrac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

Exercice 3 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n\left(\frac{2n\pi}{5} + \alpha\right) x^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes

$$\sum a_n^2 z^n \quad , \quad \sum \frac{a_n}{n!} z^n \quad , \quad \sum \frac{n! a_n}{n^n} z^n$$

Exercice 5 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \ln(n) .x^n$.

On note S sa somme. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) .x^{n+1}$$

En déduir que

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Exercice 6 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+2}{1-2x}\right)$.

Montrer que f est développable en série entière et donner son développement.
Préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 7 : Calculer les développements en séries entières des fonctions suivantes. On précisera à chaque fois le rayon de convergence des séries obtenues.

a) $x \mapsto \sin(2x)\cos^2(x)$

b) $x \mapsto (x+1)\ln(x^2 - 3x + 2)$

c) $x \mapsto \ln(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$

d) $x \mapsto \sin(\sqrt{3}x)e^x$

e) $x \mapsto \arcsin^2(x)$

f) $x \mapsto \dfrac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}}$

g) $x \mapsto \left(\dfrac{(1+x)\sin(x)}{x}\right)^2$

h) $x \mapsto \dfrac{\arcsin(\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$

i) $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$

Exercice 8 : Développer $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ en série entière en utilisant la relation : $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 9 : Donner le rayon de convergence des séries suivantes ainsi que leurs expressions à l'aide de fonctions usuelles :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n+1} x^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5}{n!} x^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2n+1} x^n$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$

Exercice 10 : Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$

1) Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la rayon de convergence de la série de Taylor est nulle.

Exercice 11 : Soit $a \in]-1,1[$. On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a^n x)$$

1) Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{1-|a|}$$

3) Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 12 : Etablir que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-sh(x)}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

Exercice 13 : A l'aide d'un développement en série entière, montrer que $\displaystyle\int_{t=0}^{1} t^t \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 14 : Établir la convergence puis calculer la valeur de $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2} \, dt$.

Exercice 15 : Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$.

Montrer, pour $0 \leqslant r < R$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta$.