Feuille de TD n°16 : couples de variables aléatoires

MP Clemenceau 2023-24

Janvier 2024

Exercice 1 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre ? > 0 et que la loi de Y sachant $(X = n)$ est binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

2) Reconnaître la loi de Y .

Exercice 2 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}\left((X = j, Y = k)\right) = a\frac{j + k}{2^{j+k}} \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer la valeur de a.

2) Déterminer les lois marginales X et Y .

3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

4) Calculer $\mathbf{P}\left((X = Y)\right)$

Exercice 3 : Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes. On considère X et Y les variables déterminées par

$$X = \sum_{i=1}^{N} U_i \qquad \text{et} \qquad Y = N - \sum_{i=1}^{N} U_i$$

1) Vérifier

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbf{P}\left((X = k, Y = \ell)\right) = \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)\ell \mathbf{P}\left((N = k + \ell)\right)$$

2) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Inversement, on suppose que les variables X et Y sont indépendantes et que la variable N n'est pas presque sûrement nulle. On pose

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \quad pk = \mathbf{P}\left(X = k\right) \quad \text{et} \quad q_\ell = \mathbf{P}\left(Y = \ell\right)$$

3) Justifier que les p_k et les q_ℓ sont tous strictement positifs.

4) Vérifier que

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \quad (k + 1)p_{k+1}q_\ell(1 - p) = (\ell + 1)p_k q_{\ell+1} p$$

5) En déduire une relation de récurrence sur les termes de la suite (p_k) puis identifier la loi suivie par X.

6) En déduire que N suit une loi de Poisson