

# Feuille de TD n°16

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2023

**Exercice 1 :** Développer en séries entières :

a)  $x \mapsto \left( \frac{(1+x)\sin(x)}{x} \right)^2$

b)  $x \mapsto \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}}$

c)  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$

**Exercice 2 :** Donner le rayon de convergence et la somme de :

a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5}{n!} x^n$

b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2n+1} x^{n7}$

c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n$

**Exercice 3 :** Pour  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$

1) Montrer que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^{+\infty}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Montrer que la rayon de convergence de la série de Taylor est nulle.

**Exercice 4 :** Soit  $a \in ]-1, 1[$ . On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a^n x)$$

1) Montrer que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^{+\infty}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{1}{1-|a|}$$

3) Montrer que  $f$  est développable en série entière.

**Exercice 5 :** Etablir que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 - sh(x)}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.