

Feuille de TD n°16

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2023

Exercice 1 : Développer en séries entières :

a) $x \mapsto \left(\frac{(1+x)\sin(x)}{x} \right)^2$

b) $x \mapsto \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}}$

c) $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$

Exercice 2 : Donner le rayon de convergence et la somme de :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5}{n!} x^n$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2n+1} x^{n7}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n$

Exercice 3 : Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$

1) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur \mathbb{R} .

2) Montrer que la rayon de convergence de la série de Taylor est nulle.

Exercice 4 : Soit $a \in]-1, 1[$. On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a^n x)$$

1) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur \mathbb{R} .

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{1}{1-|a|}$$

3) Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 5 : Etablir que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 - sh(x)}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.