Feuille de TD n°15

MP Lycée Clemenceau

Décembre 2024

Banque CCINP

Exercice : 95 Banque CCINP Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

(a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer la loi de Y.

Exercice : 97 Banque CCINP

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P((X,Y)=(j,k)) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2) Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice : 98 Banque CCINP

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.

   (b) Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i} = \dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.

   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice : 99 Banque CCINP

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in]0,+\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.

3. **Application** :
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

<u>Exercice :</u> 100 Banque CCINP

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

<u>Exercice :</u> 102 Banque CCINP

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$.
   c'est à dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

<u>Exercice :</u> 103 Banque CCINP

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

<u>Exercice :</u> 104 Banque CCINP

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.

(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

3. (a) Calculer $E(X)$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice : 106 Banque CCINP

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in\,]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}, P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice : 108 Banque CCINP

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice : 109 Banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice : 110 Banque CCINP

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R \geqslant 1$.
   On pose alors $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice : 111 Banque CCINP

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}, \sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in]-1,1[, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \displaystyle\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

Exercices

Exercice 1 : Soit $p \in]0,1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un promeneur se déplace sur un axe d'origine O. Il part de O et, à chaque pas, il lance une pièce de monnaie. S'il obtient pile (et ce avec une probabilité p), il avance d'un pas. Sinon, il recule d'un pas. Soit X la variable aléatoire égale à l'abscisse du promeneur après son n-ième pas. Soit X_1 (resp. X_2) le nombre de pas effectué vers l'avant (resp. vers l'arrière).

1) Déterminer les lois de X, X_1, X_2, et en déduire l'espérance de X.

2) Calculer la variance de X.

Exercice 2 : On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité 1/2, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert. . .).
Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
- il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1) On suppose la fortune du joueur infinie.
Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.

2) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?

3) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n?1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties.
Que devient son espérance de gain ?

Exercice 3 : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a,b]$.

1) Montrer que X admet une espérance m et que celle-ci est élément de $[a,b]$.
La variable X admet aussi une variance σ^2 que l'on se propose de majorer.
On introduit la variable aléatoire $Y = X - m$ et les quantités

$$t = \sum_{y \geqslant 0} yP(Y=y),\ s = \sum_{y \geqslant 0} y^2 P(Y=y) \text{ et } u = P(Y \geqslant 0)$$

2) Vérifier que $t^2 \leqslant su$

3) Calculer espérance et variance de Y. En déduire que $t^2 \leqslant (\sigma^2 - s)(1-u)$

4) En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir $t^2 \leqslant \sigma^2/4$

5) Conclure $\sigma^2 \leqslant (b-a)^2/4$

Exercice 4 : Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP((X=k)) = \sum_{k=0}^{n-1} P((X>k)) - nP((X>n))$.

2) En déduire que, si X admet une espérance, alors : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P((X>k))$.

3) Montrer de même que, si X admet une variance, alors : $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)P((X>k))$.

4) Dans cette question, on suppose que l'on dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On y effectue n tirages successifs d'une boule avec remise, et on note X le plus grand numéro obtenu.

(a) Calculer l'espérance de X et préciser la loi de X.

(b) Déterminer un équivalent de $E(X)$ à n fixé quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire au hasard une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne et on y ajoute une nouvelle boule de cette même couleur. On tire à nouveau au hasard une boule, on note sa couleur puis on la remet dans l'urne avec une nouvelle boule de cette même couleur, et ainsi de suite. Les tirages successifs sont supposés mutuellement indépendants. Soit X_n le nombre de boules blanches tirées au cours de n premiers tirages. Déterminer la loi de X_n.

Exercice 6 : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega) \quad \text{et} \quad P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

1) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.

2) En déduire l'espérance et la variance d'une loi binomiale négatives de paramètres n et p.

Exercice 7 : Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côtés les dés correspondants et relance les autres. Il note X_2 le nombre de 6 obtenus et répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $(suite_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ la variable $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ correspond alors un nombre de 6 obtenu après n lancers.

1) Vérifier que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.

3) On définit alors la variable aléatoire

$$T = \min\{n \in \mathbb{N}^*, S_n = N\} \cup \{+\infty\}$$

Déterminer la loi de T.

4) Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci. Calculer cette espérance pour $N = 1$ et $N = 2$.

Exercice 8 : Loi de Zipf

Soit $a \in]1, +\infty[$. On définit le réel

$$\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

1) Démontrer qu'on peut définir une probabilité P_a sur $\mathbb{N}^*$ à l'aide des réels :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad p_k = \frac{1}{\zeta(a) k^a}$$

Cette probabilité est appelée loi de Zipf de paramètre a.
Cette loi a été introduite par le mathématicien Georges Zipf pour rendre compte de la fréquence d'apparition d'un mot dans une langue donnée.
On considère désormais l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), P_a)$.

2) Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $A_m = m\mathbb{N} = \{km, k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $P_a(m\mathbb{N})$.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux entiers i et j pour que A_i et A_j soient indépendants

4) *(Application)* On note p_i le i ième nombre premier et C_n l'ensemble des entiers divisibles par aucun des nombres p_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.

(a) Calculer $P_a(C_n)$

(b) Déterminer , $\bigcap_{n \geqslant 1} C_n$

(c) En déduire le développement eulérien de la fonction ζ :

$$\forall a > 1 \quad \zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}$$

Exercice 9 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Donner la loi de $Z = X + Y$ dans les cas suivants :

1) $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda \neq \mu$

2) $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$, avec $p \neq q$

Exercice 10 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$. Déterminer la loi de X sachant que $(X + Y = n)$.

Exercice 11 : Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois respectives $\mathscr{G}(p_1)$ et $\mathscr{G}(p_2)$.

1) Calculer $P(X_1 \geqslant k)$ et $P(X_2 \geqslant k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

2) Calculer la probabilité des événements $(X_1 \leqslant X_2)$ et $(X_2 \leqslant X_1)$.

3) On pose $M = \min(X_1, X_2)$. Calculer $P(M \geqslant m)$ pour $m \in M(\Omega)$. En déduire la loi de M.

4) Retrouver la loi de M par un raisonnement direct.

5) Démontrer que la loi de X_1 sachant $(X_1 \leqslant X_2)$, la loi de X_2 sachant $(X_2 \leqslant X_1)$ et la loi de M sont identiques. Interprétation ?

Exercice 12 : Inégalité de Jensen

Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable, convexe. On suppose que X et $f(X)$ admettent toutes deux une espérance.

1) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant f'(E(X))(x - E(X)) + f(E(X))$$

2) En déduire l'inégalité de Jensen :
$$f(E(X)) \leqslant E(f(X))$$

Exercice 13 : Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire réelle indépendante de X suivant la loi uniforme sur $\{1, 2\}$.

1) Donner la loi, l'espérance et la variance de $Z = XY$.

2) Calculer la probabilité que Z soit paire.

Exercice 14 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = X_k X_{k+1}$.

1) Donner la loi de Y_k, ainsi que l'espérance et la variance de Y_k.

2) Soient i et j deux entiers naturels distincts. Discuter, suivant les valeurs de i et j, de l'indépendance de Y_i et Y_j.

Déterminer $cov(Y_i, Y_j)$.

3) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

Calculer l'espérance et la variance de Z_n.

4) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|Z_n - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 15 :

a) Une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p est une loi sans mémoire, c'est à dire :
$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbf{P}(X > n+k | X > n) = \mathbf{P}(X > k)$$

On a de plus $\mathbf{P}(X > k) = (1-p)^k$.

b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $P(X = n+1) > 0$ et $\mathbf{P}(X > k+n | X > k) = \mathbf{P}(X > n)$. Alors X suit une loi géométrique de paramètre $\mathbf{P}_X(1)$.

Exercice 16 : Séries dans je jeu de pile ou face infini

On lance une infinité de fois une pièce ayant une probabilité $p \in]0,1[$ de donner pile, les lancers étant mutuellement indépendants. Si $\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}}$, on décompose ω en sous-suites de résultats consécutifs identiques, appelés *séries,* le résultat changeant d'une série à la suivante et on note $L_1(\omega), L_2(\omega), \ldots$ les longueurs de ces séries. Par exemple, si $\omega = FFFPFPPPPFP\ldots$, on a $L_1(\omega) = 3$, $L_2(\omega) = 1$, $L_3(\omega) = 1$, $L_4(\omega) = 4, L_5(\omega) = 1$. Les fonctions $L_1, L_2, \ldots$ sont bien définies sur le sous-ensemble Ω' de $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites comportant une infinité de P et une infinité de F.

1) Prouver que Ω' est un évènement et que $\mathbf{P}(\Omega') = 1$.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans l'espace probabilisé constitué de Ω', des évènements inclus dans Ω' et de la restriction de $\mathbf{P}()$ à ces évènements. On admet que $L_1, L_2, \ldots$ sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

2) Déterminer la loi de L_1 et son espérance.

3) Déterminer la loi conjointe de (L_1, L_2). En déduire la loi de L_1 et son espérance.

4) Expliquer pourquoi L_1 et L_2 n'ont pas même loi. L_1, L_2 sont-elles indépendantes ?

5) Montrer que L_3 a même loi que L_l, et que L_1, L_3 ne sont pas indépendantes si $p \neq \frac{1}{2}$.

Exercice 17 : Temps d'attente
Au jeu de pile ou face infini avec une pièce équilibrée, on considère les variables aléatoires T_{XY} = nombre de lancers jusqu'à obtenir la séquence XY où $(X,Y) \in \{P,F\}^2$.

1) Déterminer les lois et les espérances de $T_{PP}, T_{PF}, T_{FP}, T_{FF}$.

2) Calculer $\mathbf{P}(T_{PP} > T_{PF})$ et $\mathbf{P}(T_{PP} > T_{FP})$.

3) Déterminer les lois de T_{PPF} et T_{FPP} en fonction de la loi de T_{PP} et leurs espérances.

4) Calculer $\mathbf{P}(T_{PPF} > T_{FPP})$.

Exercice 18 : Loi décomposable Soit X une variable aléatoire à valeurs dans N. On dit que X est décomposable s'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z à valeurs dans N non presque sûrement constantes telles que $Y+Z$ ait même loi que X.

1) Si X est décomposable, donner une relation entre G_X, G_Y, G_Z.

2) Soient $n \geqslant 2$ et $p \in]0,1[$. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, montrer que X est décomposable.

3) Soit $n \geqslant 2$ non premier. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. Montrer qu'il existe $(r,s) \in \mathbb{N} \setminus [\![0,1]\!]$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \left(\sum_{i=0}^{r-1} t^i\right) \times \left(\sum_{i=0}^{s-1} t^{ri}\right)$.
En déduire que X est décomposable.

4) On suppose que $n \geqslant 3$ est premier. Soit X suivant une loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. Montrer que X n'est pas décomposable.