

Feuille de TD n°15

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2023

Exercice 1 : Quels sont les endomorphismes orthogonaux diagonalisables ?

Exercice 2 : Caractérisation des symétries orthogonales

Soit $M \in \mathcal{O}(n)$.

- 1) Montrer que M est la matrice d'une symétrie orthogonale si et seulement si M est symétrique.
- 2) Dans ce cas, déterminer la base et la direction de cette symétrie en fonction des matrices $I + M$ et $I - M$.

Exercice 3 : Centre de $O(E)$

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, et s une réflexion par rapport à un hyperplan H . Soit $\vec{u} \in H^\perp, \vec{u} \neq \vec{0}$.

- 1) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est aussi une symétrie et en donner la base.
- 2) En déduire que f et s commutent si et seulement si \vec{u} est vecteur propre de f .
- 3) Quel est le centre de $O(E)$?

Exercice 4 : Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

- 1) Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u(F) = G$.
- 2) (*) Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

Exercice 5 : Somme des coefficients d'une matrice orthogonale

Soit $P \in \mathcal{O}(n)$. Démontrer que : $\left| \sum_{i,j} P_{ij} \right| \leq n$.

Quand a-t-on égalité ?