Feuille de TD n°14 : probabilités discrètes

MP Lycée Clemenceau

Décembre 2024

Banque CCP

<u>Exercice :</u> 101 banque CCINP
Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calculs, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

<u>Exercice :</u> 105 banque CCINP

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements..
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

<u>Exercice :</u> 107 banque CCINP
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement ≪ la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ≫ et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

<u>Exercice :</u> 112 banque CCINP
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

1 Exercices

<u>Exercice 1 :</u> On considère l'ensemble $\Omega = \{a, b, c\}$.
1) Donner la plus petite tribu contenant $\{a\}$
2) Donner la plus petite tribu contenant $\{a\}$ et $\{b\}$.

<u>Exercice 2 :</u> Soient $f : \Omega \to \Omega'$ une application et $\mathscr{A}'$ une tribu sur Ω'.
Vérifier que $\mathscr{A} = \left\{f^{-1}(A')/A' \in \mathscr{A}'\right\}$ définit une tribu sur Ω.

<u>Exercice 3 :</u>
1) Soit $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribu sur un même ensemble Ω.
Montrer que $\mathscr{A} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{A}_i$ est une tribu sur Ω.
2) Soit $\mathscr{B}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ et $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ la famille de toutes les tribus de Ω contenant les éléments de $\mathscr{B}$.
Vérifier que
$$\mathscr{A} = \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$$
est une tribu contenant les éléments de $\mathscr{B}$ et que c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) vérifiant cette propriété.

<u>Exercice 4 :</u> Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
1) Vérifier que
$$A = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} A_n$$
est un évènement. A quelle condition simple sur la suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'évènement A sera-t-il réalisé ?

2) Même question avec
$$A' = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$

<u>Exercice 5 :</u> Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
Montrer que
$$P(\{n\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

<u>Exercice 6 :</u> Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.
Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}$ vérifiant
$$P(\{n, n+1, \dots\}) = \lambda a_n$$

Exercice 7 : Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Pour $(A,B) \in \mathscr{A}^2$, on pose $d(A,B) = P(A\Delta B)$ avec $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B définie par $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$

1) Vérifier $d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$

2) En déduire $|P(A) - P(B)| \leqslant P(A\Delta B)$

Exercice 8 : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements presque sûrs dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Montrer que les événements , $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et , $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sont presque sûrs.

Exercice 9 : Chaque jour du lundi au vendredi, le professeur Zinzin a la probabilité $p \in]0,1[$ d'oublier ses notes de cours en classe. Peu lui importe car il improvise à chaque cours, mais ce vendredi soir il ne les retrouve plus et ça le contrarie. Il est cependant certain de les avoir eu en sa possession lundi matin.

1) Quelle est probabilité que le professeur Zinzin ait perdu ses notes de cours dans la journée de Lundi ?

2) Quel est le jour le plus probable où eu lieu cette perte ?

Exercice 10 : Trois joueurs A, B et C s'affrontent à un jeu selon les règles suivantes :
- à chaque partie deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité ;
- le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.
Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties consécutives.

1) Etablir que le jeu s'arrête presque sûrement.

2) A et B s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

Exercice 11 : On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $\frac{1}{2^n}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note A_k l'événement « n est un multiple de k ».

1) Vérifier que ceci définit bien une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$

2) Donner la probabilité de l'événement A_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3) Donner la probabilité de l'événement $A_2 \cup A_3$.

4) On note B l'événement « n est un nombre premier ». Montrer que $\frac{13}{32} < P(B) < \frac{209}{504}$.

5) Montrer que, si q et k sont des entiers strictement supérieurs à 2 alors A_q et A_k ne sont pas indépendants.

Exercice 12 : On considère 2 pièces truquées A et B. La pièce A donne "pile" avec la probabilité $a \in [0,1]$, et la pièce B donne "pile" avec la probabilité $b \in [0,1]$. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si l'on obtient "pile", on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus indéfiniment.

1) Déterminer la probabilité p_k de lancer la pièce A au k-ème lancer.

2) Déterminer la probabilité q_k d'obtenir "pile" au k-ème lancer.

3) Déterminer la limite de la suite (q_k). Interpréter le résultat obtenu si $a = 1$ et $0 < b < 1$.

Exercice 13 : On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B et C d'un triangle suivant le procédé suivant :

— si la particule se trouve sur B elle y reste.
— si la particule est sur A, elle se trouve la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
— si la particule est sur C, à la seconde d'après elle y reste une fois sur 3, elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.

A la première seconde elle se pose au hasard (de façon équiprobable) sur l'un des trois sommets.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement : « la n ième seconde la particule se trouve en A ». On note a_n, b_n et c_n les probabilités de A_n, B_n et C_n.

1) Que valent a_1, b_1 et c_1 ?

2) Donner une relation de récurrence entre a_{n+1} (resp. b_{n+1}, c_{n+1}) et a_n, b_n, c_n.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$.
En déduire a_n et b_n en fonction de n.

4) Etudier la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

<u>Exercice 14 :</u> Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$$

1) Pour quelle(s) valeur(s) de λ, l'application $\mathbb{P}$ détermine-t-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$?

2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* / \, p|n\}$. Exprimer simplement la probabilité de l'événement A_p.

3) On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p\in\mathscr{P}}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

4) En étudiant $\mathbf{P}(\{1\})$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\prod\limits_{p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$$

<u>Exercice 15 :</u> On lance une infinité de fois une pièce et on considère l'évènement
$A_k =$ « au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti trois pile de suite » avec la convention $A_0 = \Omega$.

1) En supposant les lancers mutuellement indépendants et la pièce équilibrée, montrer que
$\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{2}P(A_{k-1}) + \frac{1}{4}P(A_{k-2}) + \frac{1}{8}P(A_{k-3})$ pour $k \geqslant 3$.

2) On note α, β, γ les racines dans C du polynôme $X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{4}X - \frac{1}{8}$. Montrer, sans les calculer, que $\max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|) < 1$ et en déduire $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(A_k)$.

3) Reprendre l'exercice avec l'évènement $B_k =$ « au cours des k premiers lancers, il n'est jamais sorti la séquence PFP ».

4) Soit S une suite fixée dans $\{P, F\}^{\mathbb{N}}$.
Montrer, sans calcul, qu'il est presque certain que S apparaît au moins une fois lors d'une infinité de tirages mutuellement indépendants, avec P et F de probabilité $\frac{1}{2}$ à chaque lancer.
Montrer qu'il est presque certain que S apparaît une infinité de fois dans les mêmes conditions ; et montrer enfin que ceci reste vrai pour toute pièce vérifiant $\mathbf{P}(P) = p \in]0, 1[$, les lancers étant toujours mutuellement indépendants.