Feuille de TD n°14

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2023

1 Banque CCP

Exercice 1 : 63 banque CCINP
Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $(\ |\ )$.
On pose pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\big(u(x) \mid x\big) = 0$, est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
   Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $u \circ u^* = u^* \circ u$
   ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\big(u(x) \mid v(x)\big) = \big(u^*(x) \mid v^*(x)\big)$
   iii) $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice 2 : 66 babque CCINP

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff {}^{(}A) \in [0, +\infty[$
2. Prouver que pour tout $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$
3. Prouver que pour tout $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Rightarrow A^2B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$
4. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice 3 : 78 banque CCINP
Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

2 Exercices

Exercice 4 : Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace euclidien.
On considère une application u de E dans lui même vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid u(y)\big)$$

Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$.

Exercice 5 : Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace euclidien.
On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.
Montrer que $\ker(f + f^*) = \ker(f) \cap \ker(f^*)$.

Exercice 6 : Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace euclidien de dimension n.
Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\mathscr{C} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux bases orthonormale de E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on pose $S = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \big(u(e_i) \mid f_j\big)^2$.

Montrer que $S = tr\,(u^* \circ u)$.

Exercice 7 : Soit $(E, (\ \mid\ )$ un espace euclidien de dimension n. On considère une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[[1,n]]}$ non orthonormale de E. On définit la matrice $G = (g_{i,j})$ suivante (appelée matrice de Gram de la famille $(e_i)_{i\in[[1,n]]}$) :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad g_{i,j} = (e_i|e_j)$$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathcal{B}$

1) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si $M^\top G = GM$.

2) Montrer que f est un automorphisme orthogonal si et seulement si $M^\top GM = G$.

Exercice 8 : Soient x_1, .., x_n n réels tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. On note $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec, pour tout couple (i,j), $a_{i,j} = x_i x_j$.

1) Montrer que A est la matrice d'une projection orthogonale que l'on précisera.

2) Montrer que $2A - I_n$ est une matrice orthogonale.

Exercice 9 : Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application linéaire vérifiant

$$\forall x, y \in E, (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$$

1) Calculer $(u + v \mid u - v)$ pour u, v vecteurs unitaires.

2) Etablir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$$

3) Conclure qu'il existe $g \in \mathscr{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha.g$

Exercice 10 : Soit $f \in \mathscr{O}(E)$. Montrer que les assertions sont équivalentes :

a) $f \circ f = -Id_E$

b) $\forall x \in E$, x et $f(x)$ sont orthogonaux

c) $\forall (x,y) \in E^2$, $(f(x)|y) = -(x|f(y)$

Exercice 11 : $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien, $(f,g) \in \mathscr{S}(E)^2$.

Montrer que $Sp(f+g) \in [min(Sp(f)) + min(Sp(g)), max(Sp(f)) + max(Sp(g))]$

Exercice 12 : Soient $(A,B) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})^2$.

Montrer que $\det(A) + \det(B) \leqslant \det(A+B)$.

Exercice 13 : Décomposition QR : soit A une matrice carrée réelle inversible d'ordre n. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}$ telle que $A = QR$.

Exercice 14 : Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ dans $\mathbb{R}^n$ et $(U_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ dans $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ tels que

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad U_k^\top U_k = 1 \quad \text{et} \quad S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i U_i^\top$$

Exercice 15 : Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top SX \geqslant 0$.

Montrer qu'il existe $\mathbb{R} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$.

Exercice 16 : Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$, identifié à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dans $\mathbb{R}$, définie par $X \mapsto X^\top AX$.

Montrer que cette application atteint sa borne supérieure sur la sphère unité en un vecteur propre de la matrice A.

Exercice 17 : Soit $P \in \mathscr{O}(n)$. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de P est au plus égal à n et déterminer le cas de l'égalité.