

# Feuille de TD n°13

MP Lycée Clemenceau

Novembre 2024

**Exercice 1 :** Dans une pièce il y a 25 personnes.

- a) De combien de façons différentes peut-on les compter ?
- b) De combien de façons si l'on compte une certaine personne toujours en premier ?
- c) Et s'il y a 15 filles et 10 garçons et que l'on compte d'abord les filles et ensuite les garçons ?

**Exercice 2 :** On constitue un comité de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes.

- a) Combien y a-t-il de comités possibles ?
- b) Même question si le comité doit contenir 4 hommes et 4 femmes.
- c) Même question si le comité doit contenir au moins 2 femmes.

**Exercice 3 :** Soit  $E$  un ensemble fini, non vide, à  $n$  éléments.

- a) Déterminer le nombre de partitions de  $E$  en deux sous-ensembles (l'un pouvant être vide).
- b) Déterminer le nombre de partitions de  $E$  en sous-ensembles contenant tous 2 éléments (on suppose ici  $n$  pair).
- c) On suppose que  $\text{Card}(E) = a \times b$ . Déterminer le nombre de partitions de  $E$  en  $a$  parties à  $b$  éléments.

**Exercice 4 :** Dans le quadrillage  $\mathbb{N}^2$  on appelle « chemin croissant » tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut. On appelle « longueur » d'un chemin le nombre de pas effectués. Tous les chemins partent de l'origine  $O = (0, 0)$ .

Combien y-a-t-il de chemins de longueurs  $N$  ?

Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?

**Exercice 5 :**

- 1) A l'aide d'un raisonnement combinatoire, démontrer que

$$\forall (n, p, k) \in \mathbb{N}^3 \quad \binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$$

- 2) On suppose désormais  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  avec  $p \leq n$ .

a) Montrer la formule suivante : 
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$

b) Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que 
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{p} y^{n-p} (x+y)^p$$

3) Montrer que 
$$\sum_{k=0}^p \frac{\binom{p}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n+1-p}$$

**Exercice 6 :** Soient  $m$ ,  $n$  et  $p$  trois entiers. Démontrer, en utilisant un dénombrement judicieux, la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^p \binom{p-k}{m} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{m+n+1}$$

**Exercice 7 :** Déterminer une probabilité sur  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  telle que la probabilité de l'événement  $\{k\}$  soit proportionnelle à  $k$ .

**Exercice 8 :** A quelle(s) condition(s) sur  $x, y \in \mathbb{R}$  existe-t-il une probabilité sur  $\Omega = \{a, b, c\}$  vérifiant

$$P(\{a, b\}) = x \text{ et } P(\{b, c\}) = y ?$$

**Exercice 9 :** Un singe frappe au hasard sur le clavier d'une machine à écrire comportant 10 chiffres, 26 lettres, et 8 autres caractères.

- 1) Il frappe une touche. Quelle est la probabilité de taper une lettre ? de taper C ? de taper une lettre de MP20 ? de taper une lettre de CLEMENCEAU ?
- 2) Il frappe 4 touches. Quelle est la probabilité de taper MP20 ? de taper une anagramme de MP20 ?
- 3) Il frappe 10 touches. Quelle est la probabilité de taper une anagramme du mot CLEMENCEAU ?

**Exercice 10 :** Cinq individus ont été témoins d'un fait donné. On sait que parmi eux, deux seulement sont menteurs, mais on ignore lesquels. On questionne deux témoins au hasard. Quelle probabilité a-t-on

- a) D'obtenir à chaque fois une description véridique du fait ?
- b) D'obtenir deux versions contradictoires ?
- c) D'obtenir deux versions fausses ?

**Exercice 11 :** 3 urnes contiennent chacune 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule dans chaque. Quelle est la probabilité

- a) Que le 5 ne sorte pas ?
- b) Que les 3 numéros soient  $> 3$  ?
- c) Que le plus grand des 3 numéros soit un 4 ?

**Exercice 12 :** On dispose  $r$  boules à l'intérieur de  $n$  urnes (avec  $r \leq n$ ), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.

Les répartitions possibles sont équiprobables.

- a) Déterminer la probabilité de l'évènement :

$A$  : « chaque urne contient au plus une boule »

- b) Déterminer la probabilité de l'évènement :

$B$  : « il existe une urne contenant au moins deux boules »

**Exercice 13 :**

- a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?
- b) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six »

**Exercice 14 :** On considère  $N$  coffres. Avec une probabilité  $p$  un trésor a été placé dans l'un de ses coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable.

On a ouvert  $N - 1$  coffres sans trouver le trésor.

Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

**Exercice 15 :** Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.

On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

**Exercice 16 :** Soit  $n$  un entier naturel supérieur à 2.

On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Pour un entier  $p$  divisant  $n$ , on introduit l'évènement

$$A_p = \{1 \leq k \leq n/p \text{ divise } k\}$$

- a) Calculer  $P(A_p)$
- b) Soient  $p$  et  $q$  deux diviseurs de  $n$ . On suppose que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux. Montrer que les événements  $A_p$  et  $A_q$  sont indépendants. Plus généralement montrer que si  $p_1, \dots, p_r$  sont des diviseurs deux à deux premiers entre eux alors, les événements  $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$  sont indépendants.
- c) On note  $B = \{1 \leq k \leq n/k \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux}\}$   
Montrer

$$p(B) = \prod_{\substack{p \text{ diviseur} \\ \text{premier de } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$