

Feuille de TD n°13

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2023

1 Banque CCP

Exercice 1 : 76 banque CCINP

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

Exercice 2 : 77 banque CCINP

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E .

Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

(a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 3 : 79 banque CCINP

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.

2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

On pose, $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 4 : 80 banque CCINP

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 5 : 81 banque CCINP

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^\top A')$, où $\text{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^\top par la matrice A' .

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
4. Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

Exercice 6 : 82 banque CCINP

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 7 : 92 banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ où tr désigne la trace et tA désigne la transposée de la matrice A .

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques de E .
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\top = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
 - (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E .
Déterminer F^\perp .

2 Exercices

Exercice 8 : Soit E un espace préhilbertien réel.

- 1) Etablir que pour tout sous-espace vectoriel F de $E, \overline{F} \subset F^{\perp\perp}$.

Désormais, on suppose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$(P | Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

- 2) Montrer que $H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] / \int_{-1}^1 |t| P(t) dt = 0 \right\}$ est un hyperplan fermé de E .

- 3) Soit $Q \in H^\perp$. Etablir que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt = \left(\int_{-1}^1 |t| P(t) dt \right) \left(\int_{-1}^1 Q(t) dt \right)$$

- 4) Etablir que $H^\perp = \{0\}$ et conclure qu'ici l'inclusion $\overline{H} \subset H^{\perp\perp}$ est stricte.

Exercice 9 : Soient $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $f = (f_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (f_i | u(e_j))^2$$

Montrer que A ne dépend pas des bases orthonormales choisies

Exercice 10 : Soient E un espace préhilbertien réel, et n un entier non nul. On considère la famille (e_1, \dots, e_n) de vecteurs de E vérifiant

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, & \|e_i\| = 1 \\ \forall x \in E, & \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2 = \|x\|^2 \end{cases}$$

Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E

Exercice 11 : Les polynômes de Tchébychev.

On considère $E = \mathbb{R}[X]$

1) Montrer que l'application suivante est correctement définie et est un produit scalaire :

$$(f | g) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

2) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1] \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

En déduire que T_n est la restriction à $[-1, 1]$ d'un polynôme de degré n . Préciser son coefficient dominant.

3) Démontrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E .

4) U étant l'ensemble des polynômes de E de degré p et normalisés, calculer $\inf_{P \in U} \|P\|$

Exercice 12 : Dans $(E, (|))$ espace euclidien, on considère $a \in E$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Résoudre $\alpha(x | x) + \beta(x | a) + \gamma = 0$

Exercice 13 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $(P, Q) \in E^2$ on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

1) Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire.

2) Déterminer une base de E orthonormée pour ce produit scalaire, notée (P_0, P_1, P_2) , telle que, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, $\deg(P_i) = i$.

3) Déterminer une base orthonormée telle que les polynômes qui la composent sont tous de degré 2.

Exercice 14 : Déterminant de Gram

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leq \dim(E)$. On considère $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale directe d'un sous-espace orienté de E contenant les vecteurs u_1, \dots, u_n .

On note A la matrice de la famille de vecteurs (u_i) dans la base \mathcal{B} et $G(u_1, \dots, u_n)$ la matrice $((u_i | u_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, appelée matrice de Gram de la famille (u_i) .

1) Montrer que $G(u_1, \dots, u_n) = A^T A$.

En déduire, lorsque $n = \dim(E)$, la propriété du produit mixte : $[u_1, \dots, u_n]^2 = \det(G(u_1, \dots, u_n))$

2) Montrer que $rg(A) = rg(A^T A)$.

En déduire que $rg(u_1, \dots, u_n) = rg(G(u_1, \dots, u_n))$.

3) Soit F un sous-espace vectoriel strict de E muni d'une base (b_1, \dots, b_p) et v un vecteur de E . Montrer que la distance d de v à F est donnée par :

$$d_2 = \frac{\det(G(b_1, \dots, b_p, v))}{\det(G(b_1, \dots, b_p))}$$

Exercice 15 : Soient E un espace préhilbertien réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1) Montrer que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2$$

2) On suppose que, pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geq 2$. Soit B une boule fermée de rayon R contenant x_1, \dots, x_n .

Montrer que $R \geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}$.

Exercice 16 : Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E .
Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si, $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

Exercice 17 : Inégalité de Ptolémée
Soit E un espace euclidien.

1) Pour $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

Montrer que : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}, \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$.

2) Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in E$. Montrer que $\|\vec{a} - \vec{c}\| \|\vec{b} - \vec{d}\| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\| \|\vec{c} - \vec{d}\| + \|\vec{b} - \vec{c}\| \|\vec{a} - \vec{d}\|$.

Exercice 18 : Expression analytique

Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_4)$ une base orthonormée de E , et F le sous espace vectoriel d'équations dans \mathcal{B} :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

- 1) Trouver une base orthonormée de F .
- 2) Donner la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale sur F .
- 3) Calculer $d(\vec{e}_1, F)$.

Exercice 19 : Soit A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Montrer que l'application suivante définit bien un produit scalaire sur \mathbb{R}^4 .

$$\begin{aligned} \varphi \quad \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto {}^t X A Y \end{aligned}$$

Donner une base orthonormale de \mathbb{R}^4 muni de ce produit scalaire.

Exercice 20 : Dire à quelles conditions les applications suivantes sont des produits scalaires :

- a) $E = \mathbb{R}^2, ((x, x') | (y, y')) = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$
- b) $E = \mathbb{R}^n, ((x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n)) = a \sum_{i=1}^n x_i y_i + b \sum_{i \neq j} x_i y_j$

Exercice 21 : Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ et $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ deux espaces euclidiens, soit f une application de E dans F , vérifiant

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E \end{cases}$$

Montrer que cette application est linéaire.

Exercice 22 : On considère dans l'espace euclidien \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel, le sous espace F , défini par

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

Donner, dans la base canonique, la matrice de la projection orthogonale sur F , en déduire celle de la symétrie orthogonale par rapport à F

Exercice 23 : Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :

$$(f | g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

On pose

$$F = \{f \in E / \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{g \in E / \forall t \in [0, 1], g(t) = 0\}$$

- 1) Montrer que $F^\perp = G$
- 2) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 24 : Soit S l'ensemble des vecteurs de norme 1 d'un espace préhilbertien réel. Montrer l'implication suivante :

$$\forall (x, y) \in S^2, x \neq y \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, (1 - \lambda)x + \lambda y \notin S$$