Feuille de TD n°12

MP Lycée Clemenceau

Novembre 2024

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante.
Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice 2 : On appelle nombre algébrique, tout nombre complexe x solution d'une équation de la forme

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ avec } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \neq 0$$

On appelle degré d'un nombre algébrique x, le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que x soit solution d'une équation comme ci-dessus.

a) Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?

b) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré au plus n est dénombrable.

c) L'ensemble de tous les nombres algébriques est-il dénombrable ?

Exercice 3 :
Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 4 :
Pour $\alpha > 0$, la famille suivante est-elle sommable ?

$$\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

Exercice 5 : Etablir que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$$

en notant $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 6 : Si σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$, montrer la divergence de la série

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$$

Exercice 7 :
Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.
Quelle est la nature de $\displaystyle\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln(n)}$?

Exercice 8 :
On pose, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $a_{p,q} = \dfrac{2p+1}{p+q+2} - \dfrac{p}{p+q+1} - \dfrac{p+1}{p+q+3}$.
Calculer

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$$

Conclure.

Exercice 9 :

a) Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent à $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?

c) Montrer qu'alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Exercice 10 : Existence et valeur de

$$\sum_{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

Exercice 11 : Convergence et calcul, pour $z \in \mathbb{C}$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

Exercice 12 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$.

a) ON suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge absolument.

Montrer que la série $\sum v_n$ converge te exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

b) On suppose maintenant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) On suppose maintenant que la série $\sum u_n$ converge.

Montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.