Feuille de TD n°12

MP Clemenceau 2023-24

Décembre 2023

1 Banque CCP

<u>Exercice :</u> 2 banque CCINP

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière en 0 sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

<u>Exercice :</u> 20 banque CCINP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$
   (c) $\sum \cos n z^n$

<u>Exercice :</u> 21 banque CCINP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

<u>Exercice :</u> 22 banque CCINP

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction
   $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?.
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

<u>Exercice :</u> 23 banque CCINP

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note R.

2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

<u>Exercice :</u> 24 banque CCINP

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
2. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et précisez le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \cosh\sqrt{x} \text{ pour } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ pour } x < 0 \ .$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice :</u> 32 banque CCINP
Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$ avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

<u>Exercice :</u> 47 banque CCINP Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur le disque ouvert de convergence :

1. $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} & = & 4^n \\ a_{2n+1} & = & 5^{n+1} \end{cases}$.

<u>Exercice :</u> 51 banque CCINP

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.
2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

2 Exercices

Exercice 1 : Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n x^n$ réelle a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors la somme admet une limite infinie en $-R^+$ ou en R^-

Exercice 2 : Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ pour les suites (a_n) suivantes :

a) (a_n) converge vers $\ell \neq 0$

b) $a_n = \sum_{d|n} d^2$

c) $a_n = \begin{cases} a^n \text{ si } n \text{ est pair} \\ b^n \text{ si } n \text{ est impaire} \end{cases}$ avec $0 < a < b$

d) $\begin{cases} a_{n^2} = n! \\ a_k = 0 \text{ si } \sqrt{k} \notin \mathbb{N} \end{cases}$

e) $a_n = \dfrac{1.4.7\ldots(3n-2)}{n!}$

f) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$

g) $a_n = \dfrac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

h) $a_n = \int_0^1 \left(1+t^2\right)^n dt$

i) $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$

Exercice 3 :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes

$$\sum a_n^2 . z^n \quad , \quad \sum \frac{a_n}{n!} . z^n \quad , \quad \sum \frac{n!.a_n}{n^n} . z^n$$

Exercice 4 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que pour tout n $a_n \neq 0$ et tel que il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+k}}{a_n}\right| = \alpha > 0$.
Quel est le rayon de convergence de la série ?

Exercice 5 : Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer la somme des séries :

$$a) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^n \quad , \quad b) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \quad c) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} ch\,(n)\,.x^n$$

Exercice 6 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \ln(n)\,.x^n$.

On note S sa somme. Montrer que pour tout $x \in\,]-1, 1[$

$$S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) .x^{n+1}$$

En déduir que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Exercice 7 : Calculer les développements en séries entières des fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série obtenue.

1) $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$

2) $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 5x + 6)$

3) $f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)$

4) $f(x) = \cos(x)e^x$

5) $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

6) $f(x) = e^{2x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-2t^2} dt$

Pour la dernière on utilisera deux méthodes afin de donner deux expressions des coefficients.

Exercice 8 : Développer en série entière $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

Exercice 9 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(x+1)$.

1. Calculer sa dérivée.
2. Trouver le développement en série entière de f.

Exercice 10 : Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'une série connue :

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x)\, dx$$

Exercice 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A est diagonalisable et admet trois valeurs propres réelles dont on précisera les parties entières.

2) On pose $t_n = \mathrm{tr}(A^n)$. Exprimer t_n en fonction de $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$.

3) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ et calculer sa somme.

Exercice 12 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

1) Exprimer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$.

2) Même question avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

Exercice 13 : ★ Soit une série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

1) Montrer que pour $0 < r < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$$

2) Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?

3) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 14 : On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$$

1) Déterminer les rayons de convergence de f et de g.

2) Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.

3) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

4) Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $[-1, 1[$.

5) Trouver des équivalents de f et g en 1.

Exercice 15 : ★ Étudier la limite de la suite de terme général

$$I_n = n \int_0^1 \ln(1 + t^n)\, dt$$