Feuille de TD n°12

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2023

1 Banque CCP

<u>Exercice 1 :</u> 2 banque CCINP
On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière en 0 sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

<u>Exercice 2 :</u> 20 banque CCINP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$
   (c) $\sum \cos n z^n$

<u>Exercice 3 :</u> 21 banque CCINP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

<u>Exercice 4 :</u> 22 banque CCINP

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction
   $f \ : \ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?.
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

<u>Exercice 5 :</u> 23 banque CCINP

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.

<u>Exercice 6 :</u> 24 banque CCINP

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et précisez le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ pour } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ pour } x < 0 \ .$$
   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 7 :</u> 32 banque CCINP

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$ avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

<u>Exercice 8 :</u> 47 banque CCINP

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur le disque ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} & = & 4^n \\ a_{2n+1} & = & 5^{n+1} \end{cases}$.

<u>Exercice 9 :</u> 51 banque CCINP

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.
2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\, x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

2 Exercices

Exercice 10 : Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n x^n$ réelle a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors la somme admet une limite infinie en $-R^+$ ou en R^-

Exercice 11 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ dont les coefficients sont définis de la façon suivante :

a) $a_n = \sum_{d|n} d^2$

b) $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.

c) $a_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n} (3k-2)}{n!}$

d) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$,
$a_0 = a_1 = 1$

e) $a_n = \dfrac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

Exercice 12 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n \left(\frac{2n\pi}{5} + \alpha\right) x^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes

$$\sum a_n^2 z^n \quad , \quad \sum \frac{a_n}{n!} z^n \quad , \quad \sum \frac{n! a_n}{n^n} z^n$$

Exercice 14 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \ln(n) . x^n$.

On note S sa somme. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) . x^{n+1}$$

En déduir que

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Exercice 15 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+2}{1-2x}\right)$.

Montrer que f est développable en série entière et donner son développement.

Préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 16 : Calculer les développements en séries entières des fonctions suivantes. On précisera à chaque fois le rayon de convergence des séries obtenues.

1) $f(x) = \sin(2x)\cos^2(x)$

2) $f(x) = (x+1)\ln(x^2 - 3x + 2)$

3) $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$

4) $f(x) = \sin(\sqrt{3}x)e^x$

5) $f(x) = \arcsin^2(x)$

6) $f(x) = \dfrac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}}$

Exercice 17 : Développer $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ en série entière en utilisant la relation : $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 18 : Donner le rayon de convergence des séries suivantes ainsi que leurs expressions à l'aide de fonctions usuelles :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n+1} x^n$

Exercice 19 : A l'aide d'un développement en série entière, montrer que $\displaystyle\int_{t=0}^{1} t^t \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 20 : Établir la convergence puis calculer la valeur de $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2} \, dt$.

Exercice 21 : Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$.

Montrer, pour $0 \leqslant r < R$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta$.