

# Feuille de TD n°11

MP Lycée Clemenceau

Janvier 2023

## Banque CCP

### Exercice 1 : 101 banque CCINP

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau  $A, B$  et  $C$ .

A l'instant  $t=0$ , il se trouve au point  $A$ .

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On note  $A_n$  l'événement " l'animal est en  $A$  après son  $n^{\text{ième}}$  trajet".

On note  $B_n$  l'événement " l'animal est en  $B$  après son  $n^{\text{ième}}$  trajet".

On note  $C_n$  l'événement " l'animal est en  $C$  après son  $n^{\text{ième}}$  trajet".

On pose  $P(A_n) = a_n$ ,  $P(B_n) = b_n$  et  $P(C_n) = c_n$ .

- (a) Exprimer, en le justifiant,  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .  
(b) Exprimer, de même,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

2. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

- Justifier, sans calculs, que la matrice  $A$  est diagonalisable.
- Prouver que  $-\frac{1}{2}$  est valeur propre de  $A$  et déterminer le sous-espace propre associé.
- Déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .

**Remarque :** Le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas demandé.

- Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .

**Remarque :** Aucune expression finalisée de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  n'est demandée.

### Exercice 2 : 105 banque CCINP

- Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements..

- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut  $\frac{1}{2}$ .

- On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé ?

- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat.

### Exercice 3 : 107 banque CCINP

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

L'urne  $U_1$  contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne  $U_2$  contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_1$ .

Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  l'événement « la boule tirée au  $n^{\text{ième}}$  tirage est blanche » et on pose  $p_n = P(B_n)$ .

1. Calculer  $p_1$ .
2. Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$ .
3. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la valeur de  $p_n$ .

#### **Exercice 4 : 112 banque CCINP**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un ensemble possédant  $n$  éléments.

On désigne par  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .

1. Déterminer le nombre  $a$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \subset B$ .
2. Déterminer le nombre  $b$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ .
3. Déterminer le nombre  $c$  de triplets  $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$  tels que  $A, B$  et  $C$  soient deux à deux disjoints et vérifient  $A \cup B \cup C = E$ .

## 1 Exercices

**Exercice 5 :** On considère l'ensemble  $\Omega = \{a, b, c\}$ .

- 1) Donner la plus petite tribu contenant  $\{a\}$
- 2) Donner la plus petite tribu contenant  $\{a\}$  et  $\{b\}$ .

**Exercice 6 :** Soient  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  une application et  $\mathcal{A}'$  une tribu sur  $\Omega'$ .

Vérifier que  $\mathcal{A} = \{f^{-1}(A') / A' \in \mathcal{A}'\}$  définit une tribu sur  $\Omega$ .

**Exercice 7 :**

- 1) Soit  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille de tribu sur un même ensemble  $\Omega$ .

Montrer que  $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$  est une tribu sur  $\Omega$ .

- 2) Soit  $\mathcal{B}$  une partie de  $\mathcal{P}(\Omega)$  et  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  la famille de toutes les tribus de  $\Omega$  contenant les éléments de  $\mathcal{B}$ .

Vérifier que

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

est une tribu contenant les éléments de  $\mathcal{B}$  et que c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) vérifiant cette propriété.

**Exercice 8 :** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements de l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

- 1) Vérifier que

$$A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} A_n$$

est un événement. A quelle condition simple sur la suite d'événements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'événement  $A$  sera-t-il réalisé?

- 2) Même question avec

$$A' = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n$$

**Exercice 9 :** Soit  $P$  une probabilité sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .

Montrer que

$$P(\{n\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Exercice 10 :** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.

Déterminer  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe une probabilité  $P$  sur  $\mathbb{N}$  vérifiant

$$P(\{n, n+1, \dots\}) = \lambda a_n$$

**Exercice 11 :** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

Pour  $A, B \in \mathcal{A}$ , on pose  $d(A, B) = P(A\Delta B)$  avec  $A\Delta B$  la différence symétrique de  $A$  et  $B$  définie par  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- 1) Vérifier  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$
- 2) En déduire  $|P(A) - P(B)| \leq P(A\Delta B)$

**Exercice 12 :** Chaque jour du lundi au vendredi, le professeur Zinzin a la probabilité  $p \in ]0, 1[$  d'oublier ses notes de cours en classe. Peu lui importe car il improvise à chaque cours, mais ce vendredi soir il ne les retrouve plus et ça le contrarie. Il est cependant certain de les avoir eu en sa possession lundi matin.

- 1) Quelle est probabilité que le professeur Zinzin ait perdu ses notes de cours dans la journée de Lundi ?
- 2) Quel est le jour le plus probable où eu lieu cette perte ?

**Exercice 13 :** Trois joueurs  $A, B$  et  $C$  s'affrontent à un jeu selon les règles suivantes :

- à chaque partie deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité ;
  - le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.
- Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties consécutives.

- 1) Etablir que le jeu s'arrête presque sûrement.
- 2)  $A$  et  $B$  s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

**Exercice 14 :** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements presque sûrs dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Montrer que les événements  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  et  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  sont presque sûrs.

**Exercice 15 :** On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir  $n$  vaut  $\frac{1}{2^n}$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  on note  $A_k$  l'événement «  $n$  est un multiple de  $k$  ».

- 1) Vérifier que ceci définit bien une probabilité sur  $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$
- 2) Donner la probabilité de l'événement  $A_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .
- 3) Donner la probabilité de l'événement  $A_2 \cup A_3$ .
- 4) On note  $B$  l'événement «  $n$  est un nombre premier ». Montrer que  $\frac{13}{32} < P(B) < \frac{209}{504}$ .
- 5) Montrer que, si  $q$  et  $k$  sont des entiers strictement supérieurs à 2 alors  $A_q$  et  $A_k$  ne sont pas indépendants.

**Exercice 16 :** On considère 2 pièces truquées  $A$  et  $B$ . La pièce  $A$  donne "pile" avec la probabilité  $a \in [0, 1]$ , et la pièce  $B$  donne "pile" avec la probabilité  $b \in [0, 1]$ . On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si l'on obtient "pile", on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus indéfiniment.

- 1) Déterminer la probabilité  $p_k$  de lancer la pièce  $A$  au  $k$ -ème lancer.
- 2) Déterminer la probabilité  $q_k$  d'obtenir "pile" au  $k$ -ème lancer.
- 3) Déterminer la limite de la suite  $(q_k)$ . Interpréter le résultat obtenu si  $a = 1$  et  $0 < b < 1$ .

**Exercice 17 :** On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets  $A, B$  et  $C$  d'un triangle suivant le procédé suivant :

- si la particule se trouve sur  $B$  elle y reste.
- si la particule est sur  $A$ , elle se trouve la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- si la particule est sur  $C$ , à la seconde d'après elle y reste une fois sur 3, elle va en  $B$  sept fois plus souvent qu'en  $A$ .

A la première seconde elle se pose au hasard (de façon équiprobable) sur l'un des trois sommets.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_n$  (resp.  $B_n, C_n$ ) l'événement : « la  $n$  ième seconde la particule se trouve en  $A$  ». On note  $a_n, b_n$  et  $c_n$  les probabilités de  $A_n, B_n$  et  $C_n$ .

- 1) Que valent  $a_1, b_1$  et  $c_1$  ?
- 2) Donner une relation de récurrence entre  $a_{n+1}$  (resp.  $b_{n+1}, c_{n+1}$ ) et  $a_n, b_n, c_n$ .
- 3) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$ .  
En déduire  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .
- 4) Etudier la convergence des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .