Feuille de TD n°010

MP Lycée Clemenceau

Novembre 2024

1 Banque CCP

Exercice : n°8 banque CCINP

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice : n°9 banque CCINP

1. Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice : n°10 banque CCINP

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

Exercice : n°11 banque CCINP

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

Exercice : n°12 banque CCINP

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in[0,1]$, $g_n(x)=x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice : n°14 banque CCINP

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$.
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Exercice : n°15 banque CCINP
Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\displaystyle\sum\frac{n^2}{n!}z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R\in\mathbb{R}_+^*$?

Exercice : n°16 banque CCINP
On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\quad u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est définie sur $[0,1]$
2. On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n=\ln(n+1)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.

<u>Exercice :</u> n°17 banque CCINP

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\Big(\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\Big)$$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? Justifier.

<u>Exercice :</u> n°18 banque CCINP

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
   (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (c) Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

<u>Exercice :</u> Exercice 25 banque CCINP

1. Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

<u>Exercice :</u> n°27 banque CCINP

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

<u>Exercice :</u> n°48 banque CCINP

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)_{n\in N}$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)f(t)dt$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,dt$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.

<u>Exercice :</u> Exercice 49 banque CCINP

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt$.

   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt$.

   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}\, e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

<u>Exercice :</u> n°53 banque CCINP

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^4 x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

   $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

   (c) $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2 Exercices

Exercice 1 : On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

1) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2) En déduire qu'il en est de même pour la suite (g_n). (On utilisera la concavité de sin sur $[0,\pi]$)

Exercice 2 : Soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

1) Chercher la limite simple, f, des fonctions f_n.

2) Vérifier que $\displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} f(t)\ dt \neq \lim_{n\to\infty}\int_{t=0}^{\pi/2} f_n(t)\ dt$.

Exercice 3 : $\star$

Théorèmes de Dini

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f.

1) On suppose que chaque fonction f_n est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

2) On suppose qu'à x fixé la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

1) Donner un exemple de fonction f.

2) Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle, et que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

3) (pour les 5/2) Si $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, chercher $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{t=0}^{+\infty} g_n(t)\,dt$.

Exercice 5 :

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé et (P_n) une suite de fonctions polynomiales de degrés inférieurs ou égaux à p convergeant simplement vers f sur un intervalle $[a,b]$.

1) Démontrer que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à p, et que les coefficients des P_n convergent vers ceux de f.

2) Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 6 : On considère la fonction définie par la série suivante :

$$\text{lorsqu'il y a convergence} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2n^2}$$

1) Donner le domaine de définition de la fonction f.

2) Calculer la limite en 0 de $x \mapsto xf(x)$

On admettra l'existence et la valeur de la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

3) Calculer la limite en $+\infty$ de f.

Exercice 7 : Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1) Montrer que la série définissant f converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que la convergence est uniforme.

3) Y a-t-il convergence normale ?

4) Etudier la limite en $+\infty$.

Exercice 8 : Etude de la fonction ζ :

On considère la fonction ζ définie par, lorsque cela est possible,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1) Donner l'ensemble de définition de ζ.

2) Justifier la continuité de la fonction ζ sur son ensemble de définition.

3) Calculer sa limite en $+\infty$.

4) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $w_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt$.

(a) Montrer que la série $\sum w_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

(b) En déduire que

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o_{x\to 1^+}(1)$$

Exercice 9 : On pose $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.

a) Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Etudier la limite de S en $+\infty$.

c) Etablir que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 10 : Pour tout entier n et tout $x \in]0, 1]$ on pose $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)$ et $u_n(0) = 0$.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

2) Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

3) En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} e^{-n.x}$$

1) Donner l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) Dérminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par f

5) Intégrer cette équation et en déduire f

Exercice 12 :

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ sous réserve de convergence.

1) Étudier la convergence simple, normale, uniforme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.

4) Montrer que $x^k S(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 : Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est elle-même une fonction uniformément continue sur I.

Exercice 14 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 15 : Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur un intervalle intéressant.

Exercice 16 : Soit f une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.
Etudier la convergence de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{n}\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$.

Exercice 17 : Pour $x > 0$ on pose $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$

1) Montrer que ψ est correctement définie.

2) Montrer que ψ est continue.

3) Donner les variations de ψ.

4) Déterminer la limite de ψ en $+\infty$ puis un équivalent en $+\infty$.

5) Donner un équivalent de $\psi(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 18 : On pose, pour $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1) Justifier que S est correctement définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Préciser le sens de variations de S.

3) Etablir que, pour tout x, $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.

4) Donner un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

5) Donner un équivalent de $S(x)$ en 0.

Exercice 19 : On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$.

Etudier le domaine de définition de S, la continuité, la dérivabilité.
Donner un équivalent de $S(x)$ sur un voisinage de 0 et sur un voisinage de 1^-.

Exercice 20 : Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Montrer que la suite de terme général $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 21 : Calcul de limite

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^1 nf(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 22 :

1) Existence et valeur de $\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$.

2) Ensemble de définition de $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n\,(n!)^2}$.

3) Existence et valeur de $\int_0^{+\infty} S\,(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23 : Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Exercice 24 : Etablir

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$