Feuille de TD n°10

MP Lycée Clemenceau

Décembre 2022

Exercice 1 : Dans une pièce il y a 25 personnes.

a) De combien de façons différentes peut-on les compter ?

b) De combien de façons si l'on compte une certaine personne toujours en premier ?

c) Et s'il y a 15 filles et 10 garçons et que l'on compte d'abord les filles et ensuite les garçons ?

Exercice 2 : On constitue un comité de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes.

a) Combien y a-t-il de comités possibles ?

b) Même question si le comité doit contenir 4 hommes et 4 femmes.

c) Même question si le comité doit contenir au moins 2 femmes.

Exercice 3 : Soit E un ensemble fini, non vide, à n éléments.

a) Déterminer le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles (l'un pouvant être vide).

b) Déterminer le nombre de partitions de E en sous-ensembles contenant tous 2 éléments (on suppose ici n pair).

c) On suppose que $Card(E) = a \times b$. Déterminer le nombre de partitions de E en a parties à b éléments.

Exercice 4 : Dans le quadrillage $\mathbb{N}^2$ on appelle « chemin croissant »tout parcourt qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut. On appelle « longueur »d'un chemin le nombre de pas effectués. Tous les chemins partent de l'origine $O = (0, 0)$.

Combien y-a-t-il de chemins de longueurs N ?

Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?

Exercice 5 :

1) A l'aide d'un raisonnement combinatoire, démontrer que

$$\forall (n,p,k) \in \mathbb{N}^3 \qquad \binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

2) On suppose désormais $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$.

a) Montrer la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{p} y^{n-p} (x+y)^p$

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{p}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n+1-p}$

Exercice 6 : Soient m, n et p trois entiers. Démontrer, en utilisant un dénombrement judicieux, la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p-k}{m}\binom{k}{n} = \binom{p+1}{m+n+1}$$

Exercice 7 : Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 8 : A quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant

$$P(\{a, b\}) = x \text{ et } P(\{b, c\}) = y\,?$$

Exercice 9 : Un singe frappe au hasard sur le clavier d'une machine à écrire comportant 10 chiffres, 26 lettres, et 8 autres caractères.

1) Il frappe une touche. Quelle est la probabilité de taper une lettre ? de taper C ? de taper une lettre de MP20 ? de taper une lettre de CLEMENCEAU ?

2) Il frappe 4 touches. Quelle est la probabilité de taper MP20 ? de taper une anagramme de MP20 ?

3) Il frappe 10 touches. Quelle est la probabilité de taper une anagramme du mot CLEMENCEAU ?

Exercice 10 : Cinq individus ont été témoins d'un fait donné. On sait que parmi eux, deux seulement sont menteurs, mais on ignore lesquels. On questionne deux témoins au hasard. Quelle probabilité a-t- on

a) D'obtenir à chaque fois une description véridique du fait ?

b) D'obtenir deux versions contradictoires ?

c) D'obtenir deux versions fausses ?

Exercice 11 : 3 urnes contiennent chacune 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule dans chaque. Quelle est la probabilité

a) Que le 5 ne sorte pas ?

b) Que les 3 numéros soient > 3 ?

c) Que le plus grand des 3 numéros soit un 4 ?

Exercice 12 : On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leqslant n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.
Les répartitions possibles sont équiprobables.

a) Déterminer la probabilité de l'évènement :

$$A : \text{« chaque urne contient au plus une boule »}$$

b) Déterminer la probabilité de l'évènement :

$$B : \text{« il existe une urne contenant au moins deux boules »}$$

Exercice 13 :

a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?

b) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six »

Exercice 14 : On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor à été placé dans l'un de ses coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable.
On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor.
Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 15 : Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 16 : Soit n un entier naturel supérieur à 2.
On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Pour un entier p divisant n, on introduit l'événement

$$A_p = \{1 \leqslant k \leqslant n/p \text{ divise } k\}$$

a) Calculer $P(A_p)$

b) Soient p et q deux diviseurs de n. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Montrer que les événements A_p et A_q sont indépendants. Plus généralement montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont des diviseurs deux à deux premiers entre eux alors, les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont indépendants.

c) On note $B = \{1 \leqslant k \leqslant n/k \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux}\}$
Montrer

$$p(B) = \prod_{\substack{p \text{ diviseur} \\ \text{premier de } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$