

Feuille de TD n°9 : suites et séries de fonctions

MP Clemenceau 2023-24

Novembre 2023

Banque CCP

Exercice : Exercice 8 banque CCINP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

- (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

- (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
- (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
- (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

Exercice : Exercice 9 banque CCINP

- Soit X un ensemble, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g .
- On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
 - Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
 - Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
 - La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice : Exercice 10 banque CCINP

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

- Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

Exercice : Exercice 11 banque CCINP

- Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f .
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
 - Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice : Exercice 12 banque CCINP

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f , et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 , avec $x_0 \in [a, b]$.

Démontrer que f est continue en x_0 .

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], g_n(x) = x^n$.

La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice : Exercice 14 banque CCINP

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$

converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice : Exercice 15 banque CCINP

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X , puis de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X .

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .

3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Exercice : Exercice 16 banque CCINP

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.

2. Calculer $S'(1)$.

Exercice : Exercice 17 banque CCINP

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\begin{aligned} & \left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A \right) \\ & \quad \Downarrow \\ & \left(\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur } A \right) \end{aligned}$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? Justifier.

Exercice : Exercice 18 banque CCINP

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
 (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .
 (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

Exercice : Exercice 25 banque CCINP

1. Démontrer que, pour tout entier n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice : Exercice 26 banque CCINP

Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
3. La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Exercice : Exercice 27 banque CCINP

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice : Exercice 48 banque CCINP

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f .
 (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .
 (b) Démontrer que $\int_0^1 f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
 (c) Calculer $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.

Exercice : Exercice 49 banque CCINP

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
- (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

- (b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice : Exercice 53 banque CCINP

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

$\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

- (c) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

1 Exercices

Exercice 1 :

1) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$.

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

2) Même question avec :

pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$.

Exercice 2 : Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément.

Exercice 3 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues et définies sur un segment $[a, b]$. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f . Montrer que la suite $\left(\inf_{[a,b]} f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\inf_{[a,b]} f$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, de dérivée seconde bornée.

Montrer que la suite des fonctions $g_n : x \mapsto n(f(x + 1/n) - f(x))$ converge uniformément vers f' .

Exercice 5 : Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions f_n définies par, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}$

Exercice 6 : On pose $f_0(t) = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$.

1) Déterminer la limite simple, ℓ , de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

3) Démontrer que : $\forall t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leq \frac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.

4) En déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

(Remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geq 1$)

Exercice 7 : Théorèmes de Dini

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f .

1) On suppose que chaque fonction f_n est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

2) On suppose qu'à x fixé la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

Exercice 8 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction u_n définie sur $[0, 1]$ par

$\forall x \in [0, 1]$, $u_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x)$.

Etudier le mode convergence de la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis de la série de fonctions $\sum u_n$.

Exercice 9 : Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) = x^n f(x)$.

1) Former une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $f(1) = 0$ et f est dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

Exercice 10 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = th(x + n) - th(n)$$

1) Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

2) On note S la somme de la série, montrer que S est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x + 1) = S(x) + 1 - th(x + 1)$$

Exercice 11 : On considère la fonction définie par la série suivante :

$$\text{lorsqu'il y a convergence} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2 n^2}$$

1) Donner le domaine de définition de la fonction f .

2) Calculer la limite en 0 de $x \mapsto xf(x)$

$$\text{On admettra l'existence et la valeur de la limite suivante : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3) Calculer la limite en $+\infty$ de f .

Exercice 12 : Pour tout entier n et tout $x \in]0, 1]$ on pose $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)$ et $u_n(0) = 0$.

1) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

2) Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

3) En déduire l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} e^{-n \cdot x}$

1) Donner l'ensemble de définition de f .

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Calculer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par f

5) Intégrer cette équation et en déduire f

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie par, lorsqu'il y a convergence, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer f' .
Donner les variations de f

3) Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$

4) Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2 \cdot x}$

Exercice 15 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$

1) Justifier que f est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Etudier la limite de f en $+\infty$.

3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16 : Etudier les limites des suites de termes généraux :

a) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$

b) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx$

c) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^2} dt.$

Exercice 17 : Montrer les égalités suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

c) Pour $a > 0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$

b) $\int_0^1 \frac{(\ln(x))^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 18 : Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^\alpha (\cos(t))^n dt$$

a) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n(1)$.

b) Plus généralement, déterminer la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha)$, pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$.