Feuille de TD n°09

MP Lycée Clemenceau

Décembre 2022

Banque CCP

<u>Exercice 1 :</u> Exercice 19 banque CCINP

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : t \longmapsto t^n \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t dt$.
2. Prouver que la fonction $f : t \longmapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 e^t \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$

   Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

<u>Exercice 2 :</u> Exercice 25 banque CCINP

1. Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

<u>Exercice 3 :</u> Exercice 28 banque CCINP
N.B : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.

   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

<u>Exercice 4 :</u> Exercice 49 banque CCINP

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.

   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt$.

   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt$.

   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 5 : Exercice 50 banque CCINP

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

1 Exercices

Exercice 6 : Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right) dx$ **c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}} \, dx$ **e)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\right)^{\sqrt[3]{x}} - 1\right) dx$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) dx$ **d)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}} dx$ **f)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln(x))^{\ln(x)}} dx$

Exercice 7 : Même question que l'exercice précédent

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^x \, dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x|\sin(x)|} dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2|\sin(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx$

Exercice 8 : Même question :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. **b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2+ax+b\right) dx$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 9 : Calculer, après avoir justifier leur existence, les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$ **d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\lambda)} dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$ **f)** $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x) \, dx$ **g)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\cos(2x)}} dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 (-\ln(t))^n \, dt$ **e)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

Exercice 10 : Soient f, g et h trois fonctions intégrables sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Montrer que la fonction $\sqrt[3]{fgh}$ est aussi intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 11 : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante.
On pose $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)\sin x$.
Montrer que les intégrabilités de f et de g sont équivalentes.

Exercice 12 : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et positive. On suppose

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in [0, 1[$$

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$.

Exercice 13 : Soit $f : [1, +\infty[+ \to \mathbb{R}$ décroissante, positive, telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.
Montrer que $x \mapsto xf(x)$ admet une limite qu'on précisera.

Exercice 14 : Montrer, pour tout $(a,b) \in]0, +\infty[^2$, que

$$\int_0^1 (1-x^a)^{\frac{1}{b}} \, dx = \int_0^1 \left(1-x^b\right)^{\frac{1}{a}} \, dx$$

Exercice 15 :

1) Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f : t \mapsto \ln(\sin(t)) \qquad \text{et} \qquad g : t \mapsto \ln(\cos(t))$$

2) Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt$.

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 16 :

1) Soit f une fonction continue sur $[0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ intégrable sur $[0,1[$. On suppose de plus qu'elle est croissante sur l'intervalle.

Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

2) Calculer la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Exercice 17 : A connaitre

1) *Hors programme* Intégrales de Bertrand

Montrer les résultats suivants :

(a) $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

(b) $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(-\ln(t))^\beta}$ est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha < 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

2) Fonction Γ d'Euler :

on pose, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

(a) Montrer que cette fonction est correctement définie.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier n.

(d) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 18 : En admettant l'existe et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$ justifier l'existence et calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2}\,dt$.

Exercice 19 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ en procédant au changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 20 : Donner un équivalent en $+\infty$ de

a) $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

b) $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$

c) $x \mapsto \displaystyle\int_e^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

Exercice 21 :

1) Justifier

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln^2(x)$$

2) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln^2(x) + c + \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3) Donner un équivalent simple $\varepsilon(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 22 : Etablir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23 : Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x)=\frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Montrer que la suite de terme général $u_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 24 : Calcul de limite

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{t=0}^{1} nf(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25 :

1) Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $\delta>0$.

2) Ensemble de définition de $S : x\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n\,(n!)^2}$.

3) Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} S\,(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 26 : Montrer que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t-1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 27 : Etablir

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$$