Feuille de TD n°8 : fonctions à valeurs vectorielles

MP Clemenceau 2024-2025

novembre 2024

1 Banque CCP

Exercice : 3 banque CCINP

1) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^n(x)$.

3) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice : 4 banque CCINP

1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

2) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

3) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

2 Exercices

Exercice 1 : Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Exercice 2 : Pour tout réel x, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

a) Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$.
b) En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Exercice 3 : Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe une application $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) - f(x-y) = 2yg(x)$
Indication : on pourra s'intéresser à l'existence des dérivées successives de f

Exercice 4 : Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = 2f(x)$$

Exercice 5 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans E.

1) On suppose que f est dérivable en 0.

Calculer, pour $k \in]0,1[$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(f(x) - f(kx)\right)$

2) Réciproque : on suppose que la fonction est continue en 0 et que pour $k \in]0,1[$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(f(x) - f(kx)\right) = L$

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left\| \frac{1}{x}\left(f(x) - f(k^n x)\right) - L\frac{1-k^n}{1-k} \right\| \leq \varepsilon \frac{1-k^n}{1-k}$$

(b) En déduire que f est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$

<u>Exercice 6 :</u> Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$.

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$

<u>Exercice 7 :</u> Calculer les dérivées $n$ièmes, pour $n \in \mathbb{N}$, des fonctions suivantes :

$$1)\ x \mapsto \left(x^2+1\right)e^{-2x}, \quad 2)\ x \mapsto x^2 e^{-x}\cos(x), \quad 3)\ x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$$

<u>Exercice 8 :</u> Soit f la restriction de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
On note $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$

En déduire le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction tan.

<u>Exercice 9 :</u> Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées.
Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que $\|f'\|_\infty^2 \leqslant 4\|f\|_\infty \|f''\|_\infty$

<u>Exercice 10 :</u> Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, \mathrm{d}x = 0$
Montrer que $f = 0$.

<u>Exercice 11 :</u> Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0\left((a,b], \mathbb{R}\right)$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe sur un intervalle I contenant $f([a,b])$.

Montrer que :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)\, \mathrm{d}t$$

<u>Exercice 12 :</u>

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in C^2([a,b], E)$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\left\| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right\| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{[a,b]} \|f''\|$$

indication : on pourra comparer $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b) f''(t)\, \mathrm{d}t$

<u>Exercice 13 :</u> Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $|f''(a)| \geqslant 4$.