Feuille de TD n°6 : normes subordonnées

MP Clemenceau 2024-2025

novembre 2024

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme N qui à A associe $\sup\limits_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$.

Justifier que l'application trace est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 2 :

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\,.\,\|_2$.

Pour f et φ éléments de E on pose $T_\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que T_φ est une forme linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 3 :

On note E l'espace des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$.
On note E_∞ cet espace muni de la norme $\|\,.\,\|_\infty : f \mapsto \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$

et E_1 cet espace muni de la norme $\|\,.\,\|_1 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Soit u l'endomorphisme de E défini par, pour $x \in [0,1]$, $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$

1) Montrer que l'application v de E_∞ vers E_1 qui à f associe $u(f)$ est continue et déterminer sa norme.

2) Montrer que l'application w de E_1 vers E_∞ qui à f associe $u(f)$ est continue et déterminer sa norme.

Exercice 4 :

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E convergeant vers $x \in E$, et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathscr{L}_c(E,F)$ convergeant vers $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$ (pour la norme subordonnée).

Montrer que la suite $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans F.

Exercice 5 :

Soit E un espace vectoriel normé et $\varphi \in \mathscr{L}_c(E, \mathbb{R})$ non nulle.

Montrer que :

$$\forall x \in E \quad d\left(x, \ker(\varphi)\right) = \frac{|\varphi|}{|||\varphi|||}$$