Feuille de TD n°7 : fonctions vectorielles

MP Clemenceau 2023-24

Octobre 2023

Banque CCP

Exercice 1 : 3 banque CCINP

1) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^n(x)$.

3) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 2 : 4 banque CCINP

1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

2) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

3) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 3 : 56 banque CCINP

On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1) Montrer que H est C^1 sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

2) Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.

3) En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Exercices

Exercice 4 : Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $|f|$ admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Exercice 5 : Pour tout réel x, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

1) Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$.

2) En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Exercice 6 :

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $I \subset \mathbb{R}$ dans E ($\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie). Soit $x_0 \in I$. Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{x - x_0} \left(x f(x_0) - x_0 f(x) \right) \right)$$

Exercice 7 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans E.

1) On suppose que f est dérivable en 0.
Calculer, pour $k \in]0,1[$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(f(x) - f(kx) \right)$

2) Réciproque : on suppose que la fonction est continue en 0 et que pour $k \in]0,1[$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(f(x) - f(kx) \right) = L$

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left\| \frac{1}{x} \left(f(x) - f(k^n x) \right) - L \frac{1 - k^n}{1 - k} \right\| \leq \varepsilon \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

(b) En déduire que f est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$

Exercice 8 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$.
Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2} \right)$$

Exercice 9 : Montrer que la restriction de f de arcsin à $]0,1[$ a toute ses dérivées strictement positives sur $]0,1[$.
Indication : on montrera et on utilisera la relation suivante : $\forall t \in]0,1[\,,\ \left(1 - t^2\right) f''(t) - t.f'(t) = 0$.

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^3 + 2x - 7\right) e^{2x}$.
Calculer $D^n f(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$.
Calculer $D^n f(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 :

Montrer que la restriction de f de arcsin à $]0,1[$ a toute ses dérivées strictement positives sur $]0,1[$.
Indication : on montrera et on utilisera la relation suivante : $\forall t \in]0,1[\,,\ \left(1 - t^2\right) f''(t) - t.f'(t) = 0$

Exercice 13 :

Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, qui s'annule $n+1$ fois.
Démontrer que sa dérivée n-ième s'annule au moins une fois.

Exercice 14 :

$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$. Calculer la dérivée n-ième de f en -1.

Exercice 15 : Soit f la restriction de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On note $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1) a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

En déduire le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction tan.

Exercice 16 : $\star$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées.
Montrer que f' est bornée et que

$$\|f'\|_\infty^2 \leqslant 4 \|f\|_\infty \|f''\|_\infty$$

Exercice 17 :

Calculer les intégrales suivantes

1) $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\, dx$ 3) $I_3 = \displaystyle\int_4^5 \sqrt{x^3 - 12x - 16}dx$ 5) $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$

2) $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}}dt$ 4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\sin(3x)\, dx$ 6) $I_6 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin(x).(\sin(x)-\cos(x))}$

Exercice 18 :

Soient f et g continues sur $[a,b]$, g positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$

Trouver un exemple, avec g changeant de signe, où l'égalité est fausse.

Exercice 19 :

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et soit F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F : u \to \int_0^1 |u-t|\, f(t)dt$$

Déterminer F dans les cas suivants

$$f(t) = t, \quad f(t) = t^2$$

Exercice 20 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E (espace vectoriel normé de dimension finie) telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(a+b-x)$, a et b étant des nombres fixés. Calculer $\int_a^b x.f(x).dx$ en fonction de $\int_a^b f(x).dx$.

En déduire

$$\int_0^{\pi} \frac{x.dx}{1+\sin(x)}$$

Exercice 21 : ★

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathscr{C}^2([a,b], E)$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{[a,b]} \|f''\|$$

indication : on pourra comparer $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b (t-a)(t-b) f''(t)\, dt$

Exercice 22 : ★

Soit $f \in \mathscr{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)$. Démontrer que $\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(t))\, dt \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt\right)$.

Indication : Utiliser les sommes de Riemann et une certaine propriété de la fonction ln.

Exercice 23 : Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(\left|x - e^{it}\right|\right)\, dt$.

Calculer $I(x)$.

Exercice 24 :

Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,2\pi), \mathbb{R})$ convexe.

Quel est le signe de $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\, dt$?

Exercice 25 : ★ Lemme de Lebesgue

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)\cos(nt)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longleftrightarrow} 0$, dans les cas suivant :

a) si f est de classe $\mathscr{C}^1$.

b) si f est en escalier.

c) si f est continue.

Exercice 26 : ★

Soit $a < 0 < b$ et f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \leqslant -ab$.