Feuille de TD n°7

MP Lycée Clemenceau

Novembre 2022

Banque CCP

<u>Exercice 1 :</u> 59 banque CCINP
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, P \in E,\ f\,(P) = P - P'$.

1) Démontrer que f est bijectif de deux manières :
  (a) sans utiliser de matrice de f,
  (b) en utilisant une matrice de f.

2) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f\,(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3) f est-il diagonalisable ?

<u>Exercice 2 :</u> 62 banque CCINP
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.

2) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\ (f - 2\mathrm{Id})$:
  (a) en utilisant le lemme des noyaux ;
  (b) sans utiliser le lemme des noyaux.

3) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\ (f - 2\mathrm{Id})$.

<u>Exercice 3 :</u> 65 banque CCINP
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1) Démontrer que :
$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)\ .$$

2) (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
  (b) Démontrer que pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

<u>Exercice 4 :</u> 67 banque CCINP
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3\,(\mathbb{R})$?
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3\,(\mathbb{C})$?

<u>Exercice 5 :</u> 68 banque CCINP
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :

(a) sans calcul,

(b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

(c) en utilisant le rang de la matrice,

(d) en calculant A^2.

2) On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 6 : 69 banque CCINP

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1) Déterminer le rang de A.

2) Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 : 70 banque CCINP

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Exercice 8 : 72 banque CCINP

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1) Donner le rang de f.

2) f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 9 : 73 banque CCINP

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 10 : 74 banque CCINP

1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Exercice 11 : 75 banque CCINP

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

2) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.

3) En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

<u>Exercice 12 :</u> 83 banque CCINP
Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1) Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

2) On considère sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

3) Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

<u>Exercice 13 :</u> 88 banque CCINP

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.

(a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.

(b) u est-il diagonalisable ?
Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question 1.).

<u>Exercice 14 :</u> 91 banque CCINP
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

2) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

3) Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

<u>Exercice 15 :</u> 93 banque CCINP
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.

2) (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.

(b) En déduire que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

3) On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1 Exercices

Exercice 16 : Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$AB = P(A) \quad \text{et} \quad P(0) \neq 0$$

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 17 : Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est nilpotente et qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $B = AP(A)$.

Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Exercice 18 : Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur P dont le plus petit degré de coefficient non nul est 1 (de valuation 1).

Montrer que $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$ et qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E où la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée inversible.

Exercice 19 : Démontrer les propriétés suivantes en utilisant deux démonstrations dont l'une utilise le théorème de Cayley-Hamilton et pas l'autre :

a) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $A^n = 0$.

b) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 20 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que E est le seul sous espace stable par u non réduit à 0.

1) L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?

2) Montrer que pour tout $x \in E$ avec $x \neq 0$, la famille $\left(u^k(x)\right)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ est une base de E.
Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?

3) Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x.

Exercice 21 : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.
On considère $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = Id_E$.
Décrire les sous espaces stables par u.

Exercice 22 : Trouver les valeurs propres de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & & & & \\ 2 & & & (0) & \\ \vdots & & & & \\ n-1 & & & & \end{pmatrix}$$

Exercice 23 : Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n non nulle. Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E. Diagonaliser l'endomorphisme f de E défini par

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad f(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad f(e_n) = e_1$$

Exercice 24 : Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix}$, où $(a, b, c, e) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 25 : Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(2-X) \end{array} \right.$

Exercice 26 : Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. On considère l'application f définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & v \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \forall x \in [0,1] \ \ v(x) = \int_0^1 min(x,t) u(t)\, dt$$

Trouver les valeurs et vecteurs propres de f.

Exercice 27 : Théorème de Hadamard - disques de Gerschgorin

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont notés m_{ij} pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

1) Montrer que si M vérifie

$$\forall i \in [[1,n]] \quad |m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

alors M est inversible.

2) En déduire que le spectre de A est inclus dans $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_f\left(a_{ii}, \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|\right)$.

Exercice 28 : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Montrer que tout endomorphisme u de E admet une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par u.

Exercice 29 : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est A. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ non nul. On considère le plan P de $\mathbb{R}^3$ dont une équation cartésienne est $ax+by+cz=0$.

1) Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur $\vec{v}=(x,y,z)$ associe $ax+by+cz$.
Montrer que P est stable par f si et seulement si $\ker(\varphi) \subset \ker(\varphi \circ f)$.
En déduire que P est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice ${}^tA$.

2) Exemple : trouver les sous-espaces stables par f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 6+3\sqrt{3} & -6-2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 1-5\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 3-5\sqrt{3} & -2+4\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
Retrouver le résultat à l'aide du théorème de décomposition des noyaux.

Exercice 30 : Matrices stochastiques

Soit $M=(m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 & m_{ij} \geq 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!] & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \end{cases}$ (*matrice stochastique*)

1) Montrer que 1 est valeur propre de M.

2) Soit λ une valeur propre complexe de M.
Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
Montrer que si tous les coefficients m_{ij} sont strictement positifs alors $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

Exercice 31 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A admet un polynôme caractéristique scindé à racines simples.
Trouver l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Exercice 32 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

1) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

2) Montrer que si A ou B est inversible, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.

3) Dans le cas général, on note $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$.
Vérifier que $MP = PM$, montrer que P est inversible, et conclure.

Exercice 33 : Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que si u est diagonalisable alors u^3 est aussi diagonalisable.
Trouver une condition sur les noyaux de u et u^3 pour que u^3 diagonalisable implique u diagonalisable.

Exercice 34 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de B en fonction de celui de A.

Exercice 35 : Décomposition de Dunford

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices D et N telles que $A = D+N$, D est diagonalisable, N est nilpotente et $DN = ND$.

Exercice 36 : Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, en déduire les puissances de A.

Exercice 37 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.
Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 38 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $rg(A)$ est pair.

Exercice 39 : Le polynôme $X^4+X^3+2X^2+X+1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$?

Exercice 40 : Puissances de A
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$, et $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

2) On considère le polynôme $P = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$.
Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.

3) En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Exercice 41 : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par la donnée de $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0,v_0 et w_0.
Etudier leurs convergences.

Exercice 42 : Réduction de Jordan
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $Sp(f) = \{\lambda\}$ et $\dim(\ker(f - \lambda Id)) = 2$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 43 :
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

Avec Python

Exercice 44 : *Extrait obtenu sur BEOS*
On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes P tels que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1) Montrer que pour tout polynôme Q dans $\mathbf{R}[X]$ il existe un unique polynôme P dans E tel que $P' = Q$. On notera ce polynôme $\Phi(Q)$.

2) Implémenter la fonction Φ sur Python (aucune implémentation n'était suggérée pour le type "polynômes").

3) Montrer que Φ définit un isomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ vers E. On créer la suite de polynômes suivante : $B_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbf{N},\ B_{n+1} = \Phi(B_n)$.

4) Tracer, sur des graphiques séparés, les courbes associées aux polynômes B_n pour n allant de 0 à 10, sur le segment $[0,1]$. Quelle conjecture peut-on faire quant aux symétries de ces courbes ? Démontrer cette conjecture.

5) Montrer $\forall n > 1$, $B_n(0) = B_n(1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_{2n+1}(0) = 0$.

Exercice 45 : *Extrait obtenu sur BEOS*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$. Les questions précédées de [P] sont à faire en `Python`, on dispose de la documentation sur les matrices et les polynômes, et plus précisément la méthode `poly()` de `numpy` qui à une matrice carrée associe son polynôme caractéristique sous forme d'un array.

1) a) [P] Créer une fonction qui renvoie le polynôme caractéristique de A_n pour un n donné.

b) [P] Tester cette fonction pour n valant $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, que pouvez vous conjecturer ?

c) Démontrer cette conjecture.

2) a) [P] Créer une fonction qui renvoie le module des valeurs propres de A_n. La tester pour n valant $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, que pouvez vous conjecturer ?

b) Démontrer cette conjecture.

3) Montrer que les valeurs propres de A_n sont simples.

4) Que dire alors de $(A_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$?

Exercice 46 :

1) (a) Ecrire un programme python prenant en argument un polynôme P et une matrice A et qui calcule $P(A)$.

(b) On pose : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = 1 + X + X^2 + X^3$.

Calculer $Q(N)$ puis comparer $Q(N)$ et $(I_4?N)^{?1}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

(c) On pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = 1 + \frac{1}{2}X?\frac{1}{8}X^2$.

Calculer $R(M)^2$. Que constate-on ?

(d) Trouver une matrice $M?$ nilpotente de taille 3×3 et non triangulaire. Calculer $R(M?)2$. Conjecturer.

2) Démontrer la conjecture des questions 1.c et 1.d.

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit P_n un élément de $R_{n?1}[X]$ tel que $\sqrt{1+x} = P_n(x) + o(x^{n?1})$.

3) Calculer P_3 .

4) Exprimer P_n à l'aide des coefficients binomiaux.

5) Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que $P_n(N)^2 = N + I_n$.

6) Trouver toutes les matrices A telles que $A^2 = I_n + N$.
Indication donnée par l'énoncé : On pourra commencer par déterminer le commutant de N .