

Feuille de TD n°6 : normes subordonnées

MP Clemenceau 2023-2024

Octobre 2023

Exercice 1 :

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes muni de la norme $\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Soit L l'application de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute suite associe sa limite.

Montrer que L est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 2 :

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$.

Pour f et φ éléments de E on pose $T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t) dt$.

Montrer que T_φ est une forme linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 3 :

On note E l'espace des fonctions réelles définies et continues sur $[0, 1]$.

On note E_∞ cet espace muni de la norme $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$

et E_1 cet espace muni de la norme $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$.

Soit u l'endomorphisme de E défini par, pour $x \in [0, 1]$, $u(f)(x) = \int_0^x tf(t) dt$

1) Montrer que l'application v de E_∞ vers E_1 qui à f associe $u(f)$ est continue et déterminer sa norme.

2) Montrer que l'application w de E_1 vers E_∞ qui à f associe $u(f)$ est continue et déterminer sa norme.

Exercice 4 :

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0, 1]} |f|$$

Etudier la continuité de la forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(1) - f(0)$ et calculer sa norme.