Feuille de TD n°06

MP Clemenceau 2024-25

Octobre 2024

Banque CCINP

<u>Exercice :</u> 01 banque CCINP
On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

1) Les normes $\| \, \|_\infty$ et $\| \, \|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.

2) Dans cette question, on munit E de la norme $\| \, \|_\infty$.

(a) Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array} \right.$
Prouver que u est une application continue sur E.

(b) On pose $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$.
Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\| \, \|_\infty$.

3) Dans cette question, on munit de la norme $\| \, \|_1$.
Soit $c : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right.$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.

(b) On pose $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$.
On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
Prouver que $c \in \overline{F}$.
F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\| \, \|_1$?

<u>Exercice :</u> 13 banque CCINP

1) Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

2) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.

3) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

4) On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \, \|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.

(a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] / \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.

(b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
$S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

<u>Exercice :</u> 34 banque CCINP
Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.

1) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.

2) Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

3) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

4) Soient B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

<u>Exercice :</u> 35 banque CCINP
E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
On note $\| \ \|_E$ (respectivement $\| \ \|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1) Soient f une application de E dans F et a un point de E.
On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a.

P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2) Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

<u>Exercice :</u> 36 banque CCINP
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
On note $\| \ \|_E$ (respectivement $\| \ \|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E.

P2. f est continue en 0_E.

P3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.

2) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :
$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Démontrer que φ est linéaire et continue.

<u>Exercice :</u> 37 banque CCINP
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.

1) (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

(b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.

(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

2) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

<u>Exercice :</u> 38 banque CCINP

1) On se place sur $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\| \ \|_1$ définie par : $\forall f\in E,\ \|f\|_1=\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$.

Soit $u:\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \longmapsto & u(f)=g \end{array}\right.$, avec, pour tout $x\in[0,1]$, $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t),dt$.

On admet que u est un endomorphisme de E.

Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.

Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction définie par $f_n(t)=n\,\mathrm{e}^{-nt}$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul, fixé**.

Soit $u:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,\cdots,x_n) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} a_ix_i \end{array}\right.$.

(a) Justifier que u est continue quelque soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

(b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\| \ \|_2$, où, pour $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Calculer $|||u|||$.

3) Déterminer un espace vectoriel E, un norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes

<u>Exercice :</u> 40 banque CCINP

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\| \ \|$.
On suppose que $\forall(u,v)\in A^2$, $||u.v||\leqslant ||u||.||v||$.

1) Soit u un élément de A tel que $\|u\|<1$.

(a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

(b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2) Démontrer que, pour tout u de A, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

<u>Exercice :</u> 44 banque CCINP

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1) (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

(b) Montrer que $A\subset B\Longrightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$.

2) Montrer que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3) (a) Montrer que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

(b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E=\mathbb{R}$).

<u>Exercice :</u> 45 banque CCINP

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit E un espace vectoriel normé. On note $\| \ \|$ la norme sur E.
Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1) (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.

(b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

2) On pose : $\forall x\in E,\ d_A(x)=\inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$.

(a) Soit $x\in E$. Prouver que $d_A(x)=0\Rightarrow x\in\overline{A}$.

(b) On suppose que A est fermée et que : $\forall(x,y)\in E^2, \forall t\in[0,1],\ d_A(tx+(1-t)y)\leqslant td_A(x)+(1-t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

Exercice : 54 banque CCINP
Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

2) On pose : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

(a) Prouver que $\| \ \|$ est une norme sur E.

(b) Prouver que : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

(c) On pose : $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

Prouver que f est continue sur E.

1 Exercices

Exercice 1 : Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer :

a) $\forall (x,y,z,t) \in E^4$, $\|x-y\| + \|z-t\| + \|x-z\| + \|y-t\| \geqslant \|x-t\| + \|y-z\|$

b) $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x+y+z=0) \Rightarrow \|x-y\| + \|y-z\| + \|z-x\| \geqslant \frac{3}{2}(\|x\| + \|y\| + \|z\|)$.

Exercice 2 : Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, on pose :

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrer que N est une norme sur E et que $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$
Sont elles équivalentes ?

Exercice 3 : Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit, pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $N_1(P) = \displaystyle\sup_{0\leq k\leq n} (|a_k|)$, $N_2(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_3(P) = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]} (|P(t)|)$.

1) Démontrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.

2) Comparer ces 3 normes.

Exercice 4 : E est l'ensemble des fonctions f de classe C^2 sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f''(x)|, \qquad N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1) Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.

2) Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1 ni à N.

3) Montrer que N et N_1 sont équivalentes (introduire l'équation différentielle $y'' + y = g$).

Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel norméet F un sous espace vectoriel de E.

1) Montrer que, si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.

2) Montrer que $\overline{F}$ est un sous espace vectoriel de E.
En déduire qu'un hyperplan de E est soit fermé, soit dense.

Exercice 6 : Soit A une partie d'un espace vectoriel norméE.
Montrer que :

$$A \text{ ouvert} \Leftrightarrow A \cap Fr(A) = \emptyset \quad ; \quad A \text{ fermé } \Leftrightarrow Fr(A) \subset A$$

Exercice 7 : On pose $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et on le munit de la norme N_∞.
Soit $F = \{f \in E / f(0) = f(1)\}$.
Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F.

Exercice 8 : Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ tel que les sept ensembles suivant soient deux à deux distincts :

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{A},\ \overset{\circ}{\overline{A}},\ \overline{\mathring{A}},\ \overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}},\ \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$$

Exercice 9 : Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E. Montrer que : $\overline{A \cup C_E \overline{A}} = E$.

Exercice 10 : Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite de matrices : $A_n = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ converge vers une matrice B. Montrer que $I - A$ est inversible, et $B = (I - A)^{-1}$.

Remarque : La réciproque est fausse, c'est à dire que la suite (A_n) peut diverger même si $I - A$ est inversible. Chercher un contre-exemple.

Exercice 11 : Addition de parties

Soient A, B deux parties non vides d'un evn E. On note $A + B = \{\vec{a} + \vec{b} \text{ tq } \vec{a} \in A,\ \vec{b} \in B\}$. Montrer que :

a) Si A ou B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

b) Si A et B sont fermés, alors $A + B$ n'est pas nécéssairement fermé. (Prendre $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy = 1\}$ et $B = \{(x, 0) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}$)

c) Si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

Exercice 12 : Soient U et V deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\overset{\circ}{\overline{U}}$ et $\overset{\circ}{\overline{V}}$ sont disjoints.

Donner un contrexemple lorsque U et V ne sont pas ouverts.

Exercice 13 : On considère une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

1) Montrer que l'ensemble $D = \left\{\frac{p}{2^n} \,/\, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si f s'annule en 0 et en 1 alors $f = 0$.

3) Montrer que f est une fonction affine.

Exercice 14 : Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 les normes respectives sur E et F par :

$$\forall f \in E\ N_1(f) = \|f\|_\infty \quad , \quad \forall f \in F\ N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

On considère l'application T de E dans F définie par :

$$\forall f \in E\ ,\ \forall x \in [0,1] \quad T(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Montrer que T est une application linéaire continue.

Calculer la norme subordonnée de T.

Exercice 15 :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, on pose : $N_1(P) = \sup(|P(t)| \text{ tq } 0 \leq t \leq 1)$, $N_2(P) = \sup(|P(t)| \text{ tq } 1 \leq t \leq 2)$ et $\varphi(P) = P(0)$.

1) Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes.

2) Montrer que φ est continue pour N_1.

3) Montrer que φ est discontinue pour N_2. (Considérer $P_n(t) = (1 - t/2)^n$)

4) N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

5) Soit $\mathcal{O} = \{P \in E \text{ tq } P(0) \neq 0\}$. Montrer que $\mathcal{O}$ est ouvert pour N_1 mais pas pour N_2.

Exercice 16 :

Soient K et L deux compacts disjoints d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Montrer que $d(K, L) > 0$.

Exercice 17 : ★

Montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 18 : Théorème de Riesz

Soit E un espace vectoriel norméde dimension infinie.

1) Soit F un sev de dimension finie et $a \in E \setminus F$.

(a) Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $\|a-b\| = d(a,F)$.

(b) En déduire qu'il existe $c \in E$ tel que $\|c\| = 1 = d(c,F)$.

2) Montrer que la boule unité de E n'est pas compacte.

Exercice 19 : Soient $(E, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E et $f : K \to K$ telle que

$$\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|$$

a) Montrer qu'il existe un unique point fixe c de f sur K.

b) Soit (x_n) telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in K$. Montrer que la suite (x_n) converge vers c.

Exercice 20 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On considère F une partie fermée de E.

1) Soit K un compact de E.
Montrer que $F + K = \{f + k \,/\, (f,k) \in F \times K\}$ est un fermé.

2) Donner un exemple de fermés de $\mathbb{R}$ dont la somme n'est pas un fermé.

Exercice 21 : Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 22 : Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes muni de la norme
$\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Soit L l'application de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute suite associe sa limite.
Montrer que L est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 23 : Soit E un espace vectoriel normé et $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tels que $u \circ v - v \circ u = Id_E$.

1) Calculer $u \circ v^n - v^n \circ u$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que u ou v est discontinu.

Exercice 24 : Etudier la limite en $(0,0)$ des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{x.y.\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x)\sin(y) - \sin(xy)}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^4}}$

Exercice 25 : Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{y}$ **b)** $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$ **c)** $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

Exercice 26 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est continue.