Feuille de TD n°4

MP Clemenceau 2022-23

Septembre 2022

Banque CCINP

Exercice 1 : 35 banque CCINP
E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1) Soient f une application de E dans F et a un point de E.
On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a.

P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2) Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F désignant un espace vectoriel normé.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice 2 : 36 banque CCINP
Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E.

P2. f est continue en 0_E.

P3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

2) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 3 : 37 banque CCINP
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.

1) (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
(b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

2) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 : 38 banque CCINP

1) On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\ \|_1$ définie par : $\forall f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$, avec, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t), \mathrm{d}t$.
On admet que u est un endomorphisme de E.
Prouver que u est continue et calculer $|\!|\!|u|\!|\!|$.
Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction définie par $f_n(t) = n\,\mathrm{e}^{-nt}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul, fixé**.

Soit u : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$.

(a) Justifier que u est continue quelque soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

(b) On munit $\mathbb{R}^2$ de $\| \ \|_2$, où, pour $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Calculer $|||u|||$.

(c) On munit $\mathbb{R}^2$ de $\| \ \|_\infty$, où, pour $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.

Calculer $|||u|||$.

3) Déterminer un espace vectoriel E, un norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

<u>Exercice 5 :</u> 40 banque CCINP
Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\| \ \|$.
On suppose que $\forall (u, v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1) Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

(a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

(b) Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2) Démontrer que, pour tout u de A, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

1 Exercices

<u>Exercice 6 :</u> On considère une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

1) Montrer que l'ensemble $D = \left\{ \dfrac{p}{2^n} \,/\, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si f s'annule en 0 et en 1 alors $f = 0$.

3) Montrer que f est une fonction affine.

<u>Exercice 7 :</u> Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 les normes respectives sur E et F par :

$$\forall f \in E \; N_1(f) = \|f\|_\infty \quad , \quad \forall f \in F \; N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

On considère l'application T de E dans F définie par :

$$\forall f \in E \; , \; \forall x \in [0,1] \quad T(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Montrer que T est une application linéaire continue.
Calculer la norme subordonnée de T.

<u>Exercice 8 :</u>
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, on pose : $N_1(P) = \sup(|P(t)| \text{ tq } 0 \le t \le 1)$, $N_2(P) = \sup(|P(t)| \text{ tq } 1 \le t \le 2)$ et $\varphi(P) = P(0)$.

1) Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes.

2) Montrer que φ est continue pour N_1.

3) Montrer que φ est discontinue pour N_2. (Considérer $P_n(t) = (1 - t/2)^n$)

4) N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

5) Soit $\mathcal{O} = \{P \in E \text{ tq } P(0) \neq 0\}$. Montrer que $\mathcal{O}$ est ouvert pour N_1 mais pas pour N_2.

Exercice 9 :

Soient K et L deux compacts disjoints d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Montrer que $d(K,L)>0$.

Exercice 10 : ★

Montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11 : Théorème de Riesz

Soit E un espace vectoriel norméde dimension infinie.

1) Soit F un sev de dimension finie et $a \in E \setminus F$.

(a) Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $\|a-b\| = d(a,F)$.

(b) En déduire qu'il existe $c \in E$ tel que $\|c\| = 1 = d(c,F)$.

2) Montrer que la boule unité de E n'est pas compacte.

Exercice 12 : Soient $(E, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E et $f : K \to K$ telle que

$$\forall (x,y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$$

a) Montrer qu'il existe un unique point fixe c de f sur K.

b) Soit (x_n) telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in K$. Montrer que la suite (x_n) converge vers c.

Exercice 13 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On considère F une partie fermée de E.

1) Soit K un compact de E.
Montrer que $F+K = \{f+k \,/\, (f,k) \in F \times K\}$ est un fermé.

2) Donner un exemple de fermés de $\mathbb{R}$ dont la somme n'est pas un fermé.

Exercice 14 : Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 : Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes muni de la norme
$\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Soit L l'application de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute suite associe sa limite.
Montrer que L est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 16 : Soit E un espace vectoriel normé et $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tels que $u \circ v - v \circ u = Id_E$.

1) Calculer $u \circ v^n - v^n \circ u$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que u ou v est discontinu.

Exercice 17 : Etudier la limite en $(0,0)$ des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{x.y.\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x)\sin(y) - \sin(xy)}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^4}}$

Exercice 18 : Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{y}$ **b)** $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$ **c)** $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

Exercice 19 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

Montrer que la fonction F est continue.