

Feuille de TD n°3 : rappels d'intégration sur une segment

MP Clemenceau 2024-25

Septembre 2024

Exercice 1 : Calculer les primitives des fonctions suivantes. On précisera l'intervalle de validité.

a) $x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1}$

b) $x \mapsto \frac{1}{1 + x^4}$

c) $x \mapsto \frac{1}{\sin(x) \sin(4x)}$

d) $x \mapsto \frac{\tan(x)}{1 + \tan(x)}$

e) $x \mapsto x^k \ln(x)$

f) $x \mapsto x \cos^2(x) e^{-x}$

3

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cos^2(t) dt$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1 - a \sin(t)}} dt$

c) $\int_0^1 \frac{t^2 \arctan(t)}{1 + t^2} dt$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t} + \sqrt{1+t}} dt$

e) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin(x) \cdot (\sin(x) - \cos(x))} dx$

Exercice 3 : Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 4 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0((a, b], \mathbb{R})$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe sur un intervalle I contenant $f([a, b])$.

Montrer que :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt$$

Exercice 5 :

Soient f et g continues sur $[a, b]$, g positive sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) \cdot dt = f(c) \cdot \int_a^b g(t) \cdot dt$$

Trouver un exemple, avec g changeant de signe, où l'égalité est fautive.