Feuille de TD n°3 : intégration sur un intervalle quelconque

MP Clemenceau 2023-2024

Septembre 2023

Banque CCP

<u>Exercice :</u> 28 banque CCINP *N.B : les deux questions sont indépendantes.*

1) La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

2) Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

<u>Exercice :</u> On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in\,]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1) Démontrer que : $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma\,'(x)$ sous forme d'intégrale.

C'est tout pour ce chapitre. D'autres exercices sur l'intégration utilisent un chapitre prochain sur les suites et séries de fonctions.

Exercices

<u>Exercice 1 :</u> Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t + t^2e^{-t}}\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t}\,\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$

f) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}t^{-k}\,\mathrm{d}t$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^x\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x\,|\sin(x)|}\,\mathrm{d}x$

<u>Exercice 2 :</u> Après avoir étudier l'intégrabilité des fonctions ou la convergence des intégrales impropres calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\cos(2x)}}\,\mathrm{d}x$

<u>Exercice 3 :</u> Soient f, g et h trois fonctions intégrables sur $[1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Montrer que la fonction $\sqrt[3]{fgh}$ est aussi intégrable sur $[1,+\infty[$.

<u>Exercice 4 :</u> Soit $f \in \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right)$. On pose, dans le cas où la série converge, $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

1) On suppose que f est monotone et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Monter que $g(t)$ existe pour tout $t > 0$ et que l'on a

$$\lim_{t\to 0^+} (tg(t)) = \int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$$

2) Même question en supposant maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que f et f' sont intégrables.

3) On suppose maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que f, f' et f'' sont intégrables.
Montrer que : $g(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^{\infty} f(u)\,\mathrm{d}u + \dfrac{1}{2}f(0) + \underset{t\to 0^+}{o}(t)$.

<u>Exercice 5 :</u>
Soit P une fonction polynômiale à coefficients réels de degré supérieur ou égale à 2.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(P(t))\,\mathrm{d}t$ est impropre convergente.

<u>Exercice 6 :</u> Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que, si f est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Montrer que l'on a le même résultat avec l'hypothèse que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre convergente.

<u>Exercice 7 :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ on considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)(1+u^n)}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)}\,\mathrm{d}u$$

Après avoir montrer l'existence de ces intégrales montrer qu'elles ont égales et calculer leur valeur.

<u>Exercice 8 :</u> Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont de carré intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que ff' est intégrable et que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que f est uniformément continue et qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.

<u>Exercice 9 :</u> Montrer, pour tout $(a,b) \in]0,+\infty[^2$, que

$$\int_0^1 (1-x^a)^{\frac{1}{b}}\,dx = \int_0^1 \left(1-x^b\right)^{\frac{1}{a}}\,\mathrm{d}x$$

<u>Exercice 10 :</u> A connaitre

1) *Hors programme* Intégrales de Bertrand
Montrer les résultats suivants :

(a) $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

(b) $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(-\ln(t))^\beta}$ est intégrable sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha < 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

2) Fonction Γ d'Euler :
on pose, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que cette fonction est correctement définie.
(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(c) En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier n.
(d) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$