Feuille de TD n°3

MP Clemenceau 2022-23

Septembre 2022

Banque CCINP

<u>Exercice 1 :</u> 34 banque CCINP
Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.

1) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.

2) Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

3) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

4) Démontrer que, si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

<u>Exercice 2 :</u> 37 banque CCINP
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.

1) (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

(b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.

(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

2) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

<u>Exercice 3 :</u> 40 banque CCINP
Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\ \|$.
On suppose que $\forall (u,v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1) Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

(a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

(b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2) Démontrer que, pour tout u de A, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

<u>Exercice 4 :</u> 41 banque CCINP
Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.
Remarques

1) On utilisera au moins une fois des suites.

2) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire

3) Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

<u>Exercice 5 :</u> 44 banque CCINP
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1) (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

(b) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

2) Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3) (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 6 : 45 banque CCINP
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1) (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.

(b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

2) Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On pose $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

(a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.

(b) On suppose que A est fermée et que, $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx+(1-t)y) \leqslant td_A(x)+(1-t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

1 Exercices

Exercice 7 : Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer :

a) $\forall (x, y, z, t) \in E^4$, $\|x - y\| + \|z - t\| + \|x - z\| + \|y - t\| \geqslant \|x - t\| + \|y - z\|$

b) $\forall (x, y, z) \in E^3$, $(x + y + z = 0) \Rightarrow \|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geqslant \frac{3}{2} (\|x\| + \|y\| + \|z\|)$.

Exercice 8 : Soit $E = C^1 ([0, 1], \mathbb{R})$, on pose :

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrer que N est une norme sur E et que $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$
Sont elles équivalentes ?

Exercice 9 : Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $N_1(P) = \sup_{0 \leq k \leq n} (|a_k|)$, $N_2(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_3(P) = \sup_{t \in [0,1]} (|P(t)|)$.

1) Démontrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.

2) Comparer ces 3 normes.

Exercice 10 : E est l'ensemble des fonctions f de classe C^2 sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \qquad N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f''(x)|, \qquad N_1(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

1) Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.

2) Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1 ni à N.

3) Montrer que N et N_1 sont équivalentes (introduire l'équation différentielle $y'' + y = g$).

Exercice 11 : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel norméet F un sous espace vectoriel de E.

1) Montrer que, si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.

2) Montrer que $\overline{F}$ est un sous espace vectoriel de E.
En déduire qu'un hyperplan de E est soit fermé, soit dense.

Exercice 12 : Soit A une partie d'un espace vectoriel norméE.
Montrer que :

$$A \text{ ouvert} \Leftrightarrow A \cap Fr(A) = \emptyset \quad ; \quad A \text{ fermé } \Leftrightarrow Fr(A) \subset A$$

Exercice 13 : On pose $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et on le munit de la norme N_∞.

Soit $F = \{f \in E / f(0) = f(1)\}$.

Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F.

Exercice 14 : Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ tel que les sept ensembles suivant soient deux à deux distincts :

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{A},\ \overset{\circ}{\overline{A}},\ \overline{\mathring{A}},\ \overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}},\ \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$$

Exercice 15 : Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E. Montrer que : $\overline{A \cup C_E \overline{A}} = E$.

Exercice 16 : Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite de matrices : $A_n = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ converge vers une matrice B. Montrer que $I - A$ est inversible, et $B = (I - A)^{-1}$.

Remarque : La réciproque est fausse, c'est à dire que la suite (A_n) peut diverger même si $I - A$ est inversible. Chercher un contre-exemple.

Exercice 17 : Addition de parties

Soient A, B deux parties non vides d'un evn E. On note $A + B = \{\vec{a} + \vec{b} \text{ tq } \vec{a} \in A,\ \vec{b} \in B\}$. Montrer que :

a) Si A ou B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

b) Si A et B sont fermés, alors $A + B$ n'est pas nécéssairement fermé. (Prendre $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy = 1\}$ et $B = \{(x, 0) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}$)

c) Si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

Exercice 18 : Soient U et V deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\overset{\circ}{\overline{U}}$ et $\overset{\circ}{\overline{V}}$ sont disjoints.

Donner un contrexemple lorsque U et V ne sont pas ouverts.