Feuille de TD n°2 : rappels d'algèbre linéaire

MP Clemenceau 2024-25

Septembre 2024

1 Banque CCPINP

<u>Exercice :</u> 59 banque CCINP
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1) Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.

2) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

3) f est-il diagonalisable ?(pour plus tard)

<u>Exercice :</u> 60 banque CCINP
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1) Déterminer une base de $\ker(f)$.

2) f est-il surjectif ?

3) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

<u>Exercice :</u> 62 banque CCINP
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.

2) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux. (plus tard)
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.

3) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

<u>Exercice :</u> 64 banque CCINP
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1) Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

2) (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

<u>Exercice :</u> 71 banque CCINP
Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2) Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur P parallèlement à D.
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

<u>Exercice :</u> 85 banque CCINP

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

(a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

2) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

<u>Exercice :</u> 87 banque CCINP

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

<u>Exercice :</u> 90 banque CCINP

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

(a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4) **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

<u>Exercice :</u> 55 banque CCINP Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1) (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

2) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication : discuter suivant les valeurs de a.

2 Exercices

Exercice 1 :
Soit $E = \mathbb{R}^4$, on considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in E \quad / \quad x-2y+t=0, x-z+t=0\} \\ G &= \{(x,y,z,t) \in E \quad / \quad x+2z+t=0, 2x+y+z=0\} \end{aligned}$$

1) Montrer que ces ensembles sont des sous espaces vectoriels de E.

2) Donner une base de chacun des deux sous espaces.

3) Sont ils supplémentaires ?
(on proposera plusieurs méthodes pour montrer le résultat)

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on considère l'ensemble F des applications de la forme :

$$x \mapsto P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x)$$

où P et Q sont des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que F est un sous espace vectoriel de E de dimension finie et en donner une base.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 , muni de la base (i,j,k).

On donne $u \in \mathscr{L}(E)$ par sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Déterminer $\ker(u)$, $\operatorname{Im}(u)$ et $u(F)$, où F est le plan d'équation $x+2y-3z=0$, en précisant une base de chacun de ces sous espaces, et en donnant une équation de chacun des plans trouvés.

Exercice 4 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On considère p et q deux projecteurs de E qui commutent.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur et que

$$\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q) \quad , \quad \operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(P) \cap \operatorname{Im}(q)$$

Exercice 5 : Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
On considère $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que

$$u \circ v \circ u = u \quad \text{et} \quad v \circ u \circ v = v$$

1) Montrer que $\operatorname{Im}(v) \oplus \ker(u) = E$

2) Montrer que $\operatorname{rg}(u)$, $\operatorname{rg}(v)$ et $\operatorname{rg}(v \circ u)$ sont égaux.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 , muni de la base (i,j,k).
On donne le plan d'équation, dans cette base, $x-y+2z=0$ et la droite $D = vect(i+j+k)$.
Ecire les matrices dans (i,j,k) de $proj_{P,D}$, de $sym_{D,P}$

Exercice 7 : Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de E définie dans la base caonique par la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{9}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$$

On considère la famille de vecteurs suivants

$$e_1 = (1,-1,1) \quad e_2 = (0,1,2) \quad e_3 = (1,1,1)$$

1) Montrer que cette famille est une base de E

2) Donner la matrice de f dans cette nouvelle base

3) Donner la matrice P de passage de la base canonique à la nouvelle base.

4) Calculer P^{-1}

5) Retrouver le résultat de la première question.

Exercice 8 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que A et ${}^tA$ sont semblables.

Indication : A est la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3). On s'efforcera de trouver une base dans laquelle ${}^tA$ est la matrice du même endomorphisme u.

Exercice 9 : Calculer les déterminants suivants, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, en s'efforçant d'obtenir une expression le plus factorisée possible :

1) $\begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} a & b & a & c \\ b & a & c & a \\ a & c & a & b \\ c & a & b & a \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & b+c+d \\ 1 & b & b^2 & a+c+d \\ 1 & c & c^2 & a+b+d \\ 1 & d & d^2 & a+b+c \end{vmatrix}$

Exercice 10 : Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer le déterminant δ_n d'ordre $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) suivant :

$$\delta_n = \begin{vmatrix} a & & & (0) & & & b \\ & \diagdown & & & & \diagup & \\ & & & a\ b & & & \\ (0) & & & b\ a & & & (0) \\ & \diagup & & & & \diagdown & \\ b & & & (0) & & & a \end{vmatrix}$$

Exercice 11 : Calculer pour tout entier non nul n, le déterminant d'ordre n suivant, où $a \in \mathbb{R}$:

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & & & (0) \\ -a & 1+a^2 & -a & & \\ & -a & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & \ddots & -a \\ & & & -a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 12 :

1) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $B(z)$ la matrice dont les coefficients sont $b_{ij} = a_{ij} + z$.
Montrer que l'application $z \mapsto \det(B(z))$ est polynômiale de degré inférieur ou égal à 1

2) Application : pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}$, calculer le déterminant d'ordre n suivant $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 13 : Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre, où $f_\alpha : x \mapsto |x - \alpha|$

Exercice 14 : Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, A, B et C trois sous espaces vectoriels de E. On pose $D = A + B$. Montrer que si les sommes $A + B$ et $D + C$ sont directes alors la somme $A + B + C$ est directe.

Exercice 15 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer $f^2 = \mathrm{tr}(f)f$.
A quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 16 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = MA$.
Exprimer la trace de φ en fonction de celle de A.