Feuille de TD n°1 : suites et séries numériques

MP Clemenceau 2023-24

Septembre 2023

1 Banque CCPINP

Exercice : Numéro 1

1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice : Numéro 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

Exercice : Numéro 55

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1) (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

2) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercice : Numéro 5

1) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**
En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

(b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**
Étudier la nature de la série.
Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice : Numéro 6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1) Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice : Numéro 7

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

(i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

Exercice : Numéro 46 On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3) $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

2 Suites numériques

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Que peut-on dire de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2 : Déterminer la limite de la suite $u = \left(\left(2\sin(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cos(n)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $n\in\mathbb{N}$, $v_n = \sup\{u_p | p\geqslant n\}$, est convergente.

Exercice 4 : Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$$

Exercice 5 : Pour $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1) Montrer qu'il existe un unique $x_n\in[0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2) (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

(b) Soit $a\in]0,1[$, étudier le signe de $f_n(a)$ pour n suffisamment grand.
En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

3) (a) Donner un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) ★ Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 : ⋆

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $P_n(x) = x^n + x^2 - 1$ admet une unique racine u_n dans l'intervalle $]0,1[$.

2) Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3) Déterminer un équivalent simple de $\left(u_n - \lim_{n\to+\infty} u_n\right)$

Exercice 7 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{(4n+4)!}$$

1) Montrer que ces suites sont adjacentes.

2) Montrer que la limite commune est irrationnel.

<u>Exercice 8 :</u> ★

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, de limite 0.

1) Si on suppose $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{2}{n}$, a-t-on toujours $u_n \sim \frac{1}{n}$?

2) Montrer que, si on a $u_n + u_{2n} \sim \dfrac{3}{2n}$, alors $u_n \sim \dfrac{1}{n}$

<u>Exercice 9 :</u> Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

1) $u_0 = a > 1, \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

2) $u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$.

3) $u_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \alpha^{u_n}$.

3 Séries numériques

<u>Exercice 10 :</u> Déterminer la nature de la série de terme général :

1) $\dfrac{n!}{n^n}$

2) $\left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n^{\frac{5}{2}}}$

3) $(1+\sqrt{n})^{-n}$

4) $e^{-\sqrt{n^2-1}}$

5) $\dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ avec $a \in \mathbb{R}$

6) $\dfrac{\ln(n!)}{n^a}$

7) $\sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + an + b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

<u>Exercice 11 :</u> Même question :

1) $\dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$ **2)** $(-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ **3)** $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

<u>Exercice 12 :</u> Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, 3^{-n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$

<u>Exercice 13 :</u> Calculer les sommes, après avoir justifier leur convergence, des séries de terme général u_n suivant :

1) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

2) $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\, dt$ avec $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+)$

3) $u_n = \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$

4) $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

<u>Exercice 14 :</u> On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\pi}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n$, et $b_n = \frac{\pi}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

1) Que peut-on dire de la suite $(\sin(a_n + b_n))_{n\in\mathbb{N}}$?

2) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(a_n) = 0$.

3) Etudier la convergence de la série $\sum \sin(a_n)$.

<u>Exercice 15 :</u> On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1) Donner un équivalent de $\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
En déduire que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

2) En déduire qu'il existe une constante γ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

3) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k+1}$$

Exercice 16 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $0 < u_0 < 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

2) Montrer que la série de terme général u_n^2 converge.

3) Montrer que les séries de termes généraux $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n divergent.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On note ℓ sa limite.

5) On pose $u_n = \dfrac{\ell - v_n}{n}$. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.

6) En déduire que u_n est équivalent à $\dfrac{1}{n}$.

Exercice 17 : Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$ où a, b sont deux constantes réelles ($-a, -b \notin \mathbb{N}$).

1) Montrer que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.

2) On pose $v_n = (n+b-1)u_n$. Étudier la convergence de la suite (v_n) (on introduira la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$).

3) $\star$ En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - b + 1 < 0$ et calculer sa somme en fonction de a, b, u_0.

Exercice 18 : $\star$

Soit la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

1) Donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

2) Montrer que la suite de terme général : $v_n = u_n - \dfrac{\ln^2(n)}{2}$ est convergente.

3) $\bigstar$ Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Donner un équivalent de $v_n - \ell$.

Exercice 19 :

1) Soit (u_n) une suite réelle telle que $\sum |u_n|$ et $\sum n|u_n|$ convergent. On note $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

(a) Montrer que $nv_n \to 0$.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n$.

2) Application : Calculer lorsque c'est possible : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k$.