

Feuille de TD n°1

MP Lycée Clemenceau

Septembre 2024

1 Banque CCP

1.1 Suites

Exercice : 43 banque CCINP

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

- 1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- 2) Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Exercice : 55 banque CCINP Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

- 1) (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
- 2) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .
Indication : discuter suivant les valeurs de a .

1.2 Séries

Exercice : 5 banque CCINP

- 1) On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

- 2) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Exercice : 6 banque CCINP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

- 1) Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

- 2) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice : 7 banque CCINP

1) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulles à partir d'un certain rang.

(a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.
Prouver que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2) Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.

(i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

Exercice : 8 banque CCINP

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Exercice : 46 banque CCINP On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2) En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.

3) $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

2 Suites

Exercice 1 : ancien banque CCINP

1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 : Calculer les limites des suites définies par leur terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\frac{n!}{n^n}$

b) $\sqrt{n^2 + n + 1} - n$

c) $\frac{1}{n^\alpha} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}, \alpha \in \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$

e) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx], x \in \mathbb{R}$

f) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p > 1$. On suppose que les suites extraites $(u_{np+k})_{n \in \mathbb{N}}$, avec $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, sont convergentes et ont toutes la même limite $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 4 : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que la suite $(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

- 1) (a) Montrer que, si $\ell < 1$ alors $u_n \rightarrow 0$
- (b) Montrer que, si $\ell > 1$ alors $u_n \rightarrow +\infty$
- (c) Que peut-on dire si $\ell = 1$?

2) *

- (a) Montrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ .
- (b) Montrer que la réciproque est fausse.

- (c) Déterminer les limites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (2k-1)}$.

Exercice 6 : Comparer

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 7 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1) Etablir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{dx}{x}$$

En déduire la limite de (S_n) .

2) Etablir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n) .

Exercice 8 : Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

1) $u_0 = a > 1, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

2) $u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2 + \alpha.$

3) $u_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \alpha^{u_n}.$

Exercice 9 : ★

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, de limite 0.

1) Si on suppose $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$, a-t-on toujours $u_n \sim \frac{1}{n}$?

2) Montrer que, si on a $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$, alors $u_n \sim \frac{1}{n}$

Exercice 10 : Montrer que les suites suivantes sont adjacentes et leur limite commune est irrationnelle.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{(4n+4)!}$$

Exercice 11 : Etudier les suites définies par :

a) $\begin{cases} u_0 \in]0, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1$

b) $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad u_{n+1} = \left| u_n^2 - \frac{1}{4} \right|$

Exercice 12 : ★

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite complexe convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k$.

Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ .

Exercice 13 : ★

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et les suites } (e^{i a u_n})_{n \in \mathbb{N}}, (e^{i b u_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont convergentes}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

3 séries numériques

Exercice 14 : Déterminer la nature de la série de terme général :

- 1) $u_n = \left(\operatorname{ch} \left(\sqrt{\ln(n)} \right) \right)^{-2}$
- 2) $u_n = \frac{1}{n} + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right)$
- 3) $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$
- 4) $u_n = (1 + \sqrt{n})^{-n}$
- 5) $u_n = e^{-\sqrt{n^2-1}}$
- 6) $u_n = (\ln(n))^{-\ln(n)}$
- 7) $u_n = (\ln(\ln(n)))^{-\ln(\ln(n))}$
- 8) $u_n = \tan \left(\frac{\pi n}{4n+1} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right)$
- 9) $u_n = \left(\cos \left(\frac{a}{n} \right) + b \sin \left(\frac{a}{n} \right) \right)^n - e^{ab} \left(1 + \frac{c}{n} \right)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 15 : Même question avec :

- 1) $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$
- 2) $u_n = \frac{n(-1)^n + 2}{n^2 + 1}$
- 3) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$
- 4) $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}} \right)$
- 5) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$
- 6) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

Exercice 16 : Calculer les sommes des séries suivantes après avoir montré leur convergence :

- 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} (n-1) 4^{-n}$
- 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$
- 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n}{(3^{n+1} - 2^{n+1})(3^n - 2^n)}$
- 4) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$
- 5) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

Exercice 17 : $a_n = \frac{\pi}{2} (2 + \sqrt{3})^n$, et $b_n = \frac{\pi}{2} (2 - \sqrt{3})^n$.

1. Que peut-on dire de $\sin(a_n + b_n)$?
2. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(a_n) = 0$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum \sin(a_n)$.

Exercice 18 : *

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ et la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis la série $\sum u_n$.

Exercice 19 :

- 1) On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k)$.

Montrer que cette suite est bornée.

- 2) On considère maintenant la série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$.

- (a) Exprimer les sommes partielles de cette série en fonction de S_n .
- (b) En déduire que la série est convergente et donner sa somme.

Exercice 20 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de complexes telle que $\frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\frac{1}{\ln(n)} \left(\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

On admettra que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

Exercice 21 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$.

- 1) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2} .
- 2) Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.
- 3) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
- 4) Discuter, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{n^\alpha}$.

Exercice 22 : On considère les suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad u_n = h_n - \ln(n)$$

- 1) En étudiant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite.
- 2) Justifier le fait que $h_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = ah_{2n} - bh_n$$

En déduire la formule suivante : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$

- 3) On considère $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $w_n = -\frac{\alpha}{n}$ si n est un multiple de 4 et $w_n = \frac{1}{n}$ sinon.
Pour $\alpha \leq 1$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n w_k$.
 - (a) Montrer que la suite $(S_{4n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha = 3$.
 - (b) On suppose que $\alpha = 3$. Etablir la convergence de la série $\sum w_n$ et calculer sa somme.

Exercice 23 : Soit $a \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que la série de terme général $\arctan(n+a) - \arctan n$ est convergente.
- 2) On pose $S(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (\arctan(k+a) - \arctan k)$. Trouver $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a)$.