Feuille de TD n°1

MP Lycée Clemenceau

Septembre 2022

1 Banque CCP

1.1 Suites

<u>Exercice 1 :</u> 1 banque CCINP

1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

<u>Exercice 2 :</u> 43 banque CCINP
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

<u>Exercice 3 :</u> 55 banque CCINP Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1) (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

2) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication : discuter suivant les valeurs de a.

1.2 Séries

<u>Exercice 4 :</u> 5 banque CCINP

1) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**
En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

(b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**
Étudier la nature de la série.
Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2 + n)\right)^2}$.

<u>Exercice 5 :</u> 6 banque CCINP
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1) Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

__Exercice 6 :__ **7 banque CCINP**

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2) Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

(i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

__Exercice 7 :__ **8 banque CCINP**

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

__Exercice 8 :__ **46 banque CCINP** On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2) En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

2 Suites

Exercice 9 : Calculer les limites des suites définies par leur terme général u_n dans les exemples suivants :

a) $\dfrac{n!}{n^n}$ **b)** $\sqrt{n^2+n+1}-n$ **c)** $\dfrac{1}{n^\alpha}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $\dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ **e)** $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ **f)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$

Exercice 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p > 1$. On suppose que les suites extraites $(u_{np+k})_{n\in\mathbb{N}}$, avec $k \in [\![0, p-1]\!]$, sont convergentes et ont toutes la même limite $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 11 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que la suite $\left(u_n^2+u_nv_n+v_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Exercice 12 : Soient K un réel strictement supérieur à 1 et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0, 1]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{u_n+\varepsilon_n}{K}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 0 ?

Exercice 13 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

1) (a) Montrer que, si $\ell < 1$ alors $u_n \to 0$

(b) Montrer que, si $\ell > 1$ alors $u_n \to +\infty$

(c) Que peut-on dire si $\ell = 1$?

2) ⋆

(a) Montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.

(b) Montrer que la réciproque est fausse.

(c) Déterminer les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}$.

Exercice 14 : Comparer

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m,\ \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 15 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1) Etablir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1}\frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \int_{p-1}^{p}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

En déduire la limite de (S_n).

2) Etablir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).

Exercice 16 : Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

1) $u_0 = a > 1$,$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

2) $u_0 = 0$,$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$.

3) $u_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \alpha^{u_n}$.

Exercice 17 : ★

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, de limite 0.

1) Si on suppose $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{2}{n}$, a-t-on toujours $u_n \sim \frac{1}{n}$?

2) Montrer que, si on a $u_n + u_{2n} \sim \dfrac{3}{2n}$, alors $u_n \sim \dfrac{1}{n}$

Exercice 18 : Montrer que les suites suivantes sont adjacentes et leur limite commune est irrationnelle.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\ , \quad v_n = u_n + \frac{1}{(4n+4)!}$$

Exercice 19 : Etudier les suites définies par :

a) $\begin{cases} u_0 \in]0, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \left| u_n^2 - \dfrac{1}{4} \right| \end{cases}$

Exercice 20 : ⋆

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{2}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$.

Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 21 : ⋆

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et les suites } \left(e^{i\, a u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(e^{i\, b u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3 séries numériques

Exercice 22 : Déterminer la nature de la série de terme général :

1) $u_n = \left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{\ln(n)}\right)\right)^{-2}$

2) $u_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$

3) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$

4) $u_n = (1 + \sqrt{n})^{-n}$

5) $u_n = e^{-\sqrt{n^2-1}}$

6) $u_n = (\ln(n))^{-\ln(n)}$

7) $u_n = (\ln(\ln(n)))^{-\ln(\ln(n))}$

8) $u_n = \tan\left(\frac{\pi n}{4n+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

9) $u_n = \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right) + b\sin\left(\frac{a}{n}\right)\right)^n - e^{ab}\left(1 + \frac{c}{n}\right)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 23 : Même question avec :

1) $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}$

2) $u_n = \dfrac{n\,(-1)^n + 2}{n^2 + 1}$

3) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$

4) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)$

5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$

6) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

Exercice 24 : Calculer les sommes des séries suivantes après avoir montrer leur convergence :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\,4^{-n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n}{(3^{n+1} - 2^{n+1})(3^n - 2^n)}$

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 25 : $a_n = \frac{\pi}{2}\left(2 + \sqrt{3}\right)^n$, et $b_n = \frac{\pi}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)^n$.

1. Que peut-on dire de $\sin(a_n + b_n)$?
2. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sin(a_n) = 0$.
3. Etudier la convergence de la série $\sum \sin(a_n)$.

Exercice 26 : ⋆

On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ et la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis la série $\sum u_n$.

Exercice 27 :

1) On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k)$.

Montrer que cette suite est bornée.

2) On considère maintenant la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n)}{n}$.

(a) Exprimer les sommes partielles de cette série en fonction de S_n.

(b) En déduire que la série est convergente et donner sa somme.

Exercice 28 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de complexes telle que $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\dfrac{1}{\ln(n)}\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{u_k}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

On admettra que $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = \ln(n)+\gamma+o(1)$

Exercice 29 : Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,dt$.

1) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2}.

2) Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

3) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

4) Discuter, suivant les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{n^\alpha}$.

Exercice 30 : On considère les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad h_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \qquad u_n = h_n - \ln(n)$$

1) En étudiant la série de terme général $u_{n+1}-u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite.

2) Justifier le fait que $h_n = \ln(n)+\gamma+o(1)$.
Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k} = ah_{2n} - bh_n$$

En déduire la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$

3) On considère $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $w_n = -\frac{\alpha}{n}$ si n est un multiple de 4 et $w_n = \frac{1}{n}$ sinon.
Pour $\mathbb{N}\leqslant 1$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$.

(a) Montrer que la suite $(S_{4n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $\alpha = 3$.

(b) On suppose que $\alpha = 3$. Etablir la convergence de la série $\sum w_n$ et calculer sa somme.

Exercice 31 : Soit $a\in\mathbb{R}$.

1) Montrer que la série de terme général $\arctan(n+a)-\arctan n$ est convergente.

2) On pose $S(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\arctan(k+a)-\arctan k)$. Trouver $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} S(a)$.

4 Avec Python

Exercice 32 : On définit pour $n \in \mathbb{N}$:

$$n!! = \begin{cases} \prod_{i=0}^{k} (2i+1) & \text{si } n = 2k+1 \\ \prod_{i=1}^{k} (2i) & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

et par convention $0!! = 1$.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$.

1) (a) Représenter les 30 premiers termes de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Conjecturer la nature de la suite.

(b) Représenter les 30 premiers termes de la suite $(2U_{2n} - U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conjecturer le comportement de cette suite.

2) Montrer la conjecture de la question **1a)** en précisant la limite.

3) Montrer qu'on peut trouver deux constantes a et b telles que

$$\ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) + \frac{a}{n} + \frac{a}{n+1} = \frac{b}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Déterminer a et b.

Exercice 33 :

1) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$

(a) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la série $\sum \varepsilon_n u_n$ converge.
Soit S sa somme, montrer que $S \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On considère la suite $(\varepsilon_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant u_0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k + u_{n+1} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

i. Ecrire une fonction `Python` notée `Suite(x,n)` qui renvoie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k$.

ii. Tester la fonction pour quelques valeurs de x pour $n \in \{100, 1000, 10000\}$.

iii. Conjecturer le comportement de la suite.

(c) Démontrer la conjecture.

2) Généralisation.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (H) : $\begin{cases} \sum u_n \text{ converge} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante positive} \end{cases}$.

Soit $\lambda = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $x \in [0, \lambda]$. On considère $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie comme dans la première question.

Soit $(P) : \forall x \in [0, \lambda], x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(x) u_n$.

(a) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{3^{n+1}}$.

i. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (H).

ii. Adapter la fonction `Suite` et la tester pour $x \in \{0.25, 0.50, 0.75, 0.95\}$ et plusieurs valeurs de n.

iii. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie-t-elle (P) ? Justifier.

(b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer que la suite vérifie (P).

Exercice 34 :

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{(k+1)!}$.

Ecrire une fonction `v(n)` qui calcule le terme v_n.

Que peut-on conjecturer sur le comportement de cette suite ?

2) On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{(k+1)!}$. Montrer le résultat proposé à la question précédente dans ce cas général.

Dans la suite on définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 = 1$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{(k+1)!}$.

3) Définir une fonction `p(n)` qui calcule la liste des $n+1$ premiers termes de la suite, c'est à dire qu'il calcule la liste $[p_0, p_1, \ldots, p_n]$.

Calculer $p(n)$ pour différentes valeurs de n.

4) Supposons que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ la limite. A l'aide d'un calcul « à la physicienne »trouver une relation vérifiée par ℓ et établir que $\ell = \frac{1}{e}$.

5) Ecrire une fonction `emoins1(n)` qui calcule une approximation de e^{-1} à la précision 10^{-6}. Vérifier la cohérence avec les résultats de la question 3.

6) Prouver la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.