Devoir surveillé n°7

MP Clemenceau 2024-25

Jeudi 27 février 2025

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence ! !

Le sujet comporte un seul sujet de type CCINP

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroter ces dites copies.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

★ ★
★

Exercice I

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$.

1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2) On note S la fonction somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$. Déterminer S sur $]-R, R[$.

3) Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

Exercice II

Commutant d'une matrice

Pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ le commutant de la matrice A.

1) Démontrer que, pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $C(A)$ est un espace vectoriel.

2) Démontrer, en détaillant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera P.

3) Déterminer le commutant $C(T)$ de la matrice T. Déterminer sa dimension.

4) Démontrer que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Que peut-on en déduire pour la dimension de $C(A)$?

5) (a) Existe-t-il un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2 ?

(b) Démontrer alors que $C(A) = Vect\{I_3, A, A^2\}$.

(c) En déduire que $C(A)$ est l'ensemble des polynômes en A.
Ce résultat reste-t-il vrai pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

Problème

Inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

Dans ce problème, on note pour n entier naturel non nul :
- $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
- $\mathscr{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
- $\mathscr{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n réels positifs, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

1) *Question préliminaire*
On rappelle qu'une matrice S appartient à $\mathscr{S}_n^+$, si S appartient à $\mathscr{S}_n$ et si, pour toute matrice $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXSX \geq 0$.
Démontrer qu'une matrice S de $\mathscr{S}_n$ est élément de $\mathscr{S}_n^+$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives.

Partie I

2) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+$. Démontrer que $\sqrt[n]{\det S} \leq \dfrac{1}{n}\text{trace } S$.

3) Application : soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Démontrer que ${}^tMM \in \mathscr{S}_n^+$.

(b) Si $M = (m_{i,j})$, en déduire l'inégalité $(\det M)^2 \leq \left(\dfrac{1}{n}\right)^n \left(\displaystyle\sum_{i=i}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2\right)^n$.

Partie II : **Théorème de réduction simultanée**

4) On se donne deux matrices $A \in \mathscr{S}_n^{++}$ et $B \in \mathscr{S}_n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, dans cette base, A est la matrice d'un produit scalaire φ. On note l'espace euclidien $E = (\mathbb{R}^n, \varphi)$. Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormée de E et R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

(a) Justifier que $I_n = {}^tRAR$.

(b) On note $C = {}^tRBR$, justifier qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que ${}^tQCQ = D$.

(c) Déterminer, en fonction des matrices R et Q, une matrice inversible P telle que :

$$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP \qquad \text{(théorème de réduction simultanée).}$$

(d) Dans cette question, on prend l'exemple de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer qu'une matrice inversible P telle que la matrice ${}^tPBP$ soit diagonale n'est pas nécessairement une matrice orthogonale.

On pourra, par exemple, utiliser la forme quadratique canoniquement associée à la matrice B.

5) Démontrer l'inégalité « $\det(A+B) \geq \det A + \det B$ » dans les deux cas suivants :

(a) $A \in \mathscr{S}_n^{++}$ et $B \in \mathscr{S}_n^+$, en utilisant le théorème de réduction simultanée. On pourra remarquer ici que, avec tous les $\lambda_i \geq 0$, $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \geq \left(1 + \prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$.

(b) $A \in \mathscr{S}_n^+$ et $B \in \mathscr{S}_n^+$, en démontrant d'abord que $A+B \in \mathscr{S}_n^+$ et en considérant les cas où les matrices sont dans $\mathscr{S}_n^+$ sans être dans $\mathscr{S}_n^{++}$.

6) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{S}_n^{++}$ et $t \in [0,1]$. On note P une matrice inversible et $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dans le théorème de réduction simultanée.

(a) Exprimer $\det(tA + (1-t)B)$ en fonction de $\det P$, t et les λ_i.

(b) En utilisant la fonction ln, démontrer que, pour tout i entier compris entre 1 et n, $t + (1-t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}$.

(c) Démontrer que $\det(tA + (1-t)B) \geq (\det A)^t (\det B)^{1-t}$.

7) Si A est une matrice de $\mathscr{S}_n^{++}$ et B une matrice de $\mathscr{S}_n^+$, on démontre de même par le théorème de réduction simultanée (par la convexité de la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$) le résultat suivant qui est admis :

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}.$$

(a) Démontrer que $\mathscr{S}_n^{++}$ est dense dans $\mathscr{S}_n^{+}$.

(b) Démontrer l'inégalité ci-dessus pour A et B deux matrices de $\mathscr{S}_n^{+}$.

Partie III : **Théorème de Choleski**

8) Si A est une matrice de $\mathscr{S}_n^{++}$, il est possible, par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, de trouver une matrice triangulaire supérieure inversible à coefficients diagonaux positifs T, vérifiant $A = {}^tTT$ (décomposition de Choleski).

On ne demande pas de prouver ce résultat.

(a) On se propose de démontrer que cette matrice T est unique.
Si on pose $A = {}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$, démontrer que $T_1T_2^{-1} = I_n$ et conclure.
On pourra admettre que, si $\mathcal{T}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(\mathcal{T}, \cdot)$ est un groupe.

(b) Exemple : si $A = (a_{i,j})$, où pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, $a_{i,j} = \min(i, j)$, donner la décomposition de Choleski de la matrice A.
On ne demande pas de vérifier que A est une matrice de $\mathscr{S}_n^{++}$.

9) *Inégalité d'Hadamard*

(a) Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^{++}$, démontrer que $\det(S) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$.

(b) Application : démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (a_{i,j})$,

$$|\det M| \leq \left(\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Fin de l'énoncé