# Devoir surveillé n°5

MP Clemenceau 2023-24

Jeudi 1 février 2024

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence ! !
Le sujet comporte deux problèmes au choix.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroter ces dites copies.

**Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.**

★ ★
★

## Sujet type CCINP

**L'épreuve est constituée d'un problème en cinq parties largement indépendantes.**

Soit $p \in ]0,1[$. On pose $q = 1-p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la $n$-ième lettre à l'instant $n$ de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités $p$ et $q$ (respectivement) d'être générées. Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.

On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa série génératrice.

Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières) et quelques propriétés d'algèbre linéaire.

Dans les parties **I**, **II** et **V**, on examine le temps d'attente pour les séquences C puis CC, puis CPC et CCPPC. La partie **II** est indépendante de la partie **I** et traite de questions préliminaires sur les séries entières qui seront investies dans les parties **III** et **V**. La partie **IV** est indépendante des parties précédentes et traite les questions préliminaires d'algèbre linéaire qui servent exclusivement dans la partie **V**. La partie **III** ne dépend de la partie **I** que par la question **Q4** et de la partie **II** que par la question **Q10**. La partie **V** utilise seulement la question **Q11** de la partie **II** et la partie **IV**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n$ l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant $n$ »et $C_n$ l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant $n$ ».

## Partie I - Étude d'un cas simple

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1.

On note $Y$ l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que $Y$ est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note $G_Y$ la série génératrice de $Y$ et $R_Y$ son rayon de convergence.

On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et que : $\forall t \in ]-R_Y, R_Y[,\ G_Y(t) = \mathbf{E}(t^Y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n)t^n$.

**Q1.** Reconnaître la loi de $Y$ et préciser en particulier $\mathbf{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Q2.** Montrer que $R_Y = \dfrac{1}{p}$ et que : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p}\right[$, $G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.

**Q3.** Montrer que $G_Y$ est 2 fois dérivable en 1 et que $G'(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G''(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.

**Q4.** Donner les valeurs de $\mathbf{E}(Y)$ et de $\mathbf{V}(Y)$.

## Partie II - Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$

**Q5.** Montrer que $\sum u_n(a)z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

**Q6.** Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n$.

Soit $a$, $b$ et $\lambda$ des nombres complexes non nuls. Dans les questions **Q7** à **Q10**, on suppose que $|a| < |b|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(a)u_{n-k}(b)$ et pour tout réel $t$ tel que $|t| < |a|$, $f(t) = \dfrac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$.

**Q7.** Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$$

**Q8.** Trouver un équivalent simple de $v_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Q9.** En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

**Q10.** Justifier que $f$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence $R_f$ tel que $R_f = |a|$.

Soit $a$, $b$, $c$ et $\lambda$ des nombres complexes non nuls. On suppose que : $|a| \leqslant |b| \leqslant |c|$.

Pour tout réel $t$ tel que $|t| < |a|$, on pose : $g(t) = \dfrac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

**Q11.** Justifier que $g$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence $R_g$ tel que $R_g \geqslant |a|$.

## Partie III - Étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC.

On note $Z$ l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi $Z$ est le temps d'attente de la séquence CC.

On admet que $Z$ est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbf{P}(Z = n)$. On note $G_Z$ la série génératrice de $Z$ et $R_Z$ son rayon de convergence. On rappelle que $R_Z \geqslant 1$.

**Q12.** Calculer $p_1$, $p_2$ et $p_3$.

**Q13.** Justifier que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'évènements.

**Q14.** En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $p_n = p\,p_{n-1} + pq\,p_{n-2}$.

**Q15.** En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2t^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t) = 1 - pt - pqt^2$, $\Delta = p^2 + 4pq > 0$, $a = \dfrac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$ et $b = \dfrac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$.

**Q16.** Montrer que $Q(-1) = 1 + p^2 > 0$ et que $Q(1) = q^2 > 0$.

**Q17.** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = -pq(t-a)(t-b)$.

**Q18.** Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel $t$ tel que $|t| < |a|$, on définit $f(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

**Q19.** Montrer à l'aide de la question **Q10** que $f$ est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est $G_Z$ et que $R_Z = |a|$.

**Q20.** Montrer que, pour tout $t \in ] - |a|\,, |a|\,[$, on a : $G_Z(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

**Q21.** Montrer que $Z$ admet une espérance et une variance puis que $\mathbf{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

**Q22.** Vérifier, à l'aide des questions **Q4** et **Q21**, que $\mathbf{E}(Z) \geqslant \mathbf{E}(Y) + 1$ où $Y$ est la variable aléatoire définie en partie **I**.

**Q23.** Pouvait-on prévoir ce résultat ?

## Partie IV - Algèbre linéaire

On considère les matrices $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p & 0 \\ q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $\chi_A$ le polynôme caractéristique de $A$.

**Q24.** Montrer que 0 est valeur propre de $A$ et donner un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 0.

**Q25.** Trouver les réels $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On dit que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de $(E_t)$ lorsque $S = tAS + L$.

**Q27.** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S$ est solution de $(E_t)$ si et seulement si $(I_4 - tA)S = L$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_A(t)$ le déterminant de la matrice $I_4 - tA$.

**Q27.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi_A(t) = t^4\chi_A(1/t)$.

**Q28.** Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$.

**Q29.** En déduire que, pour $t$ au voisinage de 0, l'équation $(E_t)$ possède une unique solution $S$.

Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on note $U_k$ la $k$-ième colonne de $I_4 - tA$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et on suppose que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de $(E_t)$.

**Q30.** Vérifier que $L = U_1S_0 + U_2S_1 + U_3S_2 + U_4S_3$.

**Q31.** En déduire que $\det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \det_{\mathscr{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = S_3 \cdot \psi_A(t)$.

**Q32.** Montrer que, pour $t$ au voisinage de 0, on a l'égalité :

$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.$$

On se propose de déterminer certaines propriétés des valeurs propres de $A$. On note $\lambda$ une valeur propre complexe non nulle de $A$.

**Q33.** Montrer que $\lambda$ est valeur propre de la matrice transposée de $A$.

**Q34.** En déduire qu'il existe trois complexes non tous nuls $x_1$, $x_2$ et $x_3$ tels que :

$$(\mathscr{H}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcl} px_1 & + & qx_2 & = & \lambda x_1 \\ qx_2 & + & px_3 & = & \lambda x_2 \\ & & px_1 & = & \lambda x_3 \end{array} \right. .$$

On considère désormais trois complexes non tous nuls $x_1$, $x_2$ et $x_3$ qui vérifient le système $(\mathscr{H})$. On note alors $M = \max(|x_1|\,, |x_2|\,, |x_3|)$ et on remarque que l'on peut toujours se placer dans l'un des trois cas suivants :

**i)** $M = |x_3|$ ; **ii)** $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$ ; **iii)** $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$.

**Q35.** Montrer, en distinguant ces trois cas, que $|\lambda| < 1$.

**Q36.** Montrer l'existence de nombres complexes $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ tels que :
$0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| < 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \chi_A(t) = t(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$.

**Q37.** Montrer l'existence de nombres complexes $\mu$, $a$, $b$ et $c$ tels que :
$$\mu \neq 0, \qquad 1 < |a| \leqslant |b| \leqslant |c| \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \psi_A(t) = \mu(t-a)(t-b)(t-c).$$

## Partie V - Étude d'un dernier cas

Dans cette partie, on suppose que :

- l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C ;
- l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre P ;
- l'automate passe du niveau 2 au niveau 3 en générant la lettre C ;
- si l'automate est au niveau 0 ou 2 et qu'il génère la lettre P, alors il retombe au niveau 0 ;
- si l'automate est au niveau 1 et qu'il génère la lettre C, alors il reste au niveau 1.

L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 3, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CPC.

Pour $i \in [\![0,3]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_{n,i}$ l'événement « après avoir généré la $n$-ième lettre, l'automate se trouve au niveau $i$ »et $E_{0,i}$ l'événement « l'automate se trouve initialement au niveau $i$ ». On pose $p_{n,i} = \mathbf{P}(E_{n,i})$ et pour tout $t \in [-1,1]$, on définit $S_i(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,i} t^n$.

On note $T$ l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 3.

On admet que $T$ est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

On remarque que la série génératrice de $T$ (notée $G_T$) est alors $S_3$ et on note $R_T$ son rayon de convergence. On rappelle que $R_T \geqslant 1$.

**Q38.** Déterminer $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{0,2}$ et $p_{0,3}$.

**Q39.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left\{\begin{array}{lclcl} p_{n,0} & = & p \cdot p_{n-1,0} & + & p \cdot p_{n-1,2} \\ p_{n,1} & = & q \cdot p_{n-1,0} & + & q \cdot p_{n-1,1} \\ p_{n,2} & = & p \cdot p_{n-1,1} & & \\ p_{n,3} & = & q \cdot p_{n-1,2} & & \end{array}\right.$

Soit $t \in [-1,1]$. On note $S(t)$ la matrice colonne suivante : $S(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{pmatrix}$.

**Q41.** Montrer que $\left\{\begin{array}{lclclcl} S_0(t) & = & tp \cdot S_0(t) & + & tp \cdot S_2(t) & + & 1 \\ S_1(t) & = & tq \cdot S_0(t) & + & tq \cdot S_1(t) & & \\ S_2(t) & = & tp \cdot S_1(t) & & & & \\ S_3(t) & = & tq \cdot S_2(t) & & & & \end{array}\right.$.

**Q42.** Montrer que la matrice colonne $S(t)$ est solution de l'équation $(E_t)$ définie en partie **IV**.

**Q43.** Montrer que $\forall t \in ]-R_T, R_T[,\ G_T(t) = \dfrac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}$ et montrer que $R_T > 1$.

**Q44.** Montrer que $T$ admet une espérance et une variance.

**Q45.** Donner l'expression de $\mathbf{E}(T)$ en fonction de $q$ seulement.

**Q46.** Proposer une méthode permettant de déterminer le temps d'attente moyen de la première réalisation par l'automate de la séquence CCPPC : on précisera notamment la matrice analogue à $A$ que l'on peut faire intervenir dans ce problème.

## Sujet type Centrale

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

# I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**1)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**2)** Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

On admet que $f$ est de classe $C^1$ et que, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t$

**3)** Montrer que $g$ est définie et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

**4)** à l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

**5)** Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$.

**6)** En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

# II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

***II.A*** – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

**7)** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

**8)** Donner une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel $n$.

***II.B*** – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

**9)** Si $n$ est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y.$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n},+\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n},+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1+\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

**10)** Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$, préciser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(y)$.

Pour $x \in ]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ on pose $q(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

**11)** Justifier que $q$ est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,+\infty[$ que l'on convient de noter également $q$.

**12)** Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u$.

**13)** En déduire que $q$ est une fonction décroissante sur $]-1, +\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(y) \leq (1+y)\mathrm{e}^{-y} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{-*}, \quad f_n(y) \leq \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

**14)** Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

***II.C*** – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \qquad v_n = \ln(u_n) \qquad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

**15)** Vérifier que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

**II.C.1)** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

**16)** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul $n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad (1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n.$$

**17)** En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

**II.C.2)** Si $n$ est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

**18)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^2}$.

**19)** En déduire un équivalent simple de $R_n$ lorsque $n \to +\infty$.

**II.C.3)**

**20)** Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \to +\infty$.

**21)** En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

## III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.
Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in ]0,1[ \text{ et } q = 1-p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

L'abscisse $S_n$ du point à l'issue du $n$-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geq 2$, quel que soit l'entier $k$ compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.

On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$ ) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$ ).

On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \quad \text{et} \quad b_n = \mathbf{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\big)$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

***III.A*** –

**22)** Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$ ? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable $S_n$.

**23)** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

**24)** En déduire le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.

**25)** Pour quelles valeurs de $p$ l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$ ?

**26)** En utilisant le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

***III.B*** –

**27)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

**28)** En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de $x$ elle est valable.

**29)** Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ pour $x$ dans un intervalle à préciser.

**30)** Pour quelles valeurs de $p$ l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$ ? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?

***III.C*** –

**31)** En déduire que la probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p - q|$.

## IV Loi de l'arcsinus

Dans cette partie, on reprend les notations de la partie III et on se place dans le cas particulier $p = q = 1/2$. Dans ce cas tous les «chemins » de la marche aléatoire sont équiprobables : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

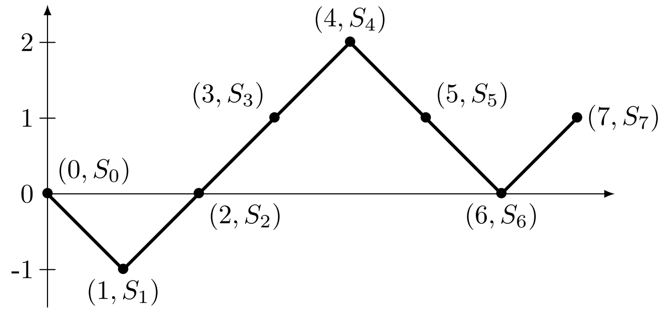
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \mathbf{P}\big([S_1 = x_1] \cap [S_2 = x_1 + x_2] \cap \cdots \cap [S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n]\big) = \frac{1}{2^n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse désormais au moment de la *dernière visite* en 0 de la marche aléatoire au cours des $2n$ premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire $T_n$ définie par

$$T_n = \max\{0 \leq k \leq 2n \mid S_k = 0\}.$$

On admet dans la suite que $T_n$ est une variable aléatoire discrète, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $x$ est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

***IV.A*** – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *chemin de longueur $n$* toute ligne polygonale reliant les points $(0, S_0)$, $(1, S_1), \ldots, (n, S_n)$.




Dans cette sous-partie IV.A, $n$, $x$ et $y$ sont des entiers naturels tels que $n \neq 0$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

**IV.A.1)** On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0,0)$ au point $(n,x)$.

**32)** Vérifier que si $x \in [\![-n, n]\!]$ et $n - x$ est un entier pair alors

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \quad \text{où} \quad a = \frac{n+x}{2}$$

et que $N_{n,x} = 0$ dans le cas contraire.

**33)** En déduire $\mathbf{P}(S_n = x)$.

**34)** Retrouver ce résultat à l'aide d'une variable aléatoire bien choisie.

**IV.A.2) Principe de réflexion**

**35)** Montrer que le nombre de chemins reliant $(0, x)$ à $(n, y)$, tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0 , est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à $(n, y)$.

**IV.A.3)**

**36)** En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à $(n, x)$ sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}.$$

**37)** En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]\big) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k-1) - \mathbf{P}(S_{2n-1} = 2k+1)\Big).$$

**38)** En remarquant que $[S_{2n} > 0] = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} [S_{2n} = 2k]$, démontrer que

$$\mathbf{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]\big) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$$

puis que

$$\mathbf{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]\big) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$$

***IV.B*** – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**39)** Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbf{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbf{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]\big).$$

**40)** En déduire que pour $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbf{P}(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}.$$

***IV.C*** – Dans cette sous-partie IV.C $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$.

**41)** On définit la fonction $f$ par $f(t) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } t \in [0, \alpha[ \\ \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in [\alpha, \beta] \\ f(\beta) & \text{si } t \in ]\beta, 1]. \end{cases}$

En utilisant des sommes de Riemann adaptées à $f$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t.$$

**42)** Á l'aide de la partie II justifier qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 1 telle que

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{8n}\right).$$

**43)** En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{\lfloor n\beta\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\right) = 0.$$

**44)** Montrer alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha})\right).$$

*Ce résultat a des conséquences assez surprenantes au premier abord. Par exemple* $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ *s'interprète ainsi : si deux personnes parient chacune un euro chaque jour de l'année à un jeu de hasard équilibré, alors avec la probabilité 1/2, un des deux joueurs sera en tête du premier juillet au 31 décembre.*

---

• • • FIN • • •

---