Correction : Devoir surveillé n°5

MP Clemenceau 2022-23

Jeudi 12 janvier 2023

Sujet de type CCINP

Notations.

On note

J un intervalle de $[0, +\infty[$.

f une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

g une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous réserve de son existence, on note $\widetilde{f}_g(x) = \displaystyle\int_J f(t)g(xt)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

Chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\widetilde{f}(x)$ au lieu de $\widetilde{f}_g(x)$.

Objectifs.

Pour différentes hypothèses sur la fonction f, sur l'intervalle J et pour deux choix de g, on se propose de déterminer la limite de $\widetilde{f}_g(x)$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

Dans la partie **1**, on étudie un exemple explicite avec application à des calculs de sommes de séries.

Dans la partie **2**, on considère une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et l'objectif est d'obtenir la limite en $+\infty$ de $\widetilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = |\sin(t)|$, lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ ou lorsque f est continue par morceaux.

1 Une étude de séries.

1.1 Etude de la fonction L.

Pour tout x réel tel que la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \left((-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right)$ converge, on note $L(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ sa somme.

Q1) Montrer que la fonction L est définie sur $]-1, 1]$ et expliciter $L(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

Correction : On peut dire par exemple que la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \left((-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right)$ a même rayon de convergence que la série géométrique $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \left((-1)^{k-1}x^k\right)$. Le rayon de convergence de cette dernière est 1.

Par propriété, le rayon de convergence de la série entière étant 1 la fonction L est correctement définie sur $]-1, 1[$.

En $x = -1$ on reconnait la série harmonique qui est divergente.

En $x = 1$ il suffit d'appliquer le critère des séries alternées pour voir que la série (harmonique alternée) est convergente.

Conclusion : L est définie sur $]-1, 1]$.

On reconnait le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 + x)$ qui est valable pour $x \in]-1, 1[$.

Q2) Montrer, avec soin, que la fonction L est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire que $L(1) = \ln(2)$.

Correction : Soit $f_n \ : \ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

- Les f_n sont des fonctions continues sur $[0, 1]$.

- Pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x)$ est le terme général d'une suite alternée, décroissante en module et de limite nulle. On peut donc dire que $\sum(f_n(x))$ converge par critère spéciale ET que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Le majorant est indépendant de $x \in [0,1]$ et est le terme général d'une suite de limite nulle. $\sum(f_n)$ est donc uniformément convergente sur $[0,1]$

Par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions : $L \in \mathscr{C}^0([0,1])$

1.2 Etude de la série $\sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3} \right) \right)$.

On considère la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ a_{3p} = -\frac{2}{3p} \ ; \ \forall p \in \mathbb{N}, \ a_{3p+1} = \frac{1}{3p+1} \quad \text{et} \quad a_{3p+2} = \frac{1}{3p+2}$$

Q3) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}}$$

Correction : On découpe la somme en trois parties selon la congruence modulo 3 de l'indice puis on s'arrange pour retrouver tous les $\frac{1}{k}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3p} a_k &= \sum_{i=1}^{p} a_{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} a_{3i+1} + \sum_{i=0}^{p-1} a_{3i+2} \\ &= -\sum_{i=1}^{p} \frac{2}{3i} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{3i+1} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{3i+2} \\ &= -3\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{3i} + \sum_{k=1}^{3p} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On change alors d'indice ($h = k - p$) et on factorise :

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{p+h} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}}$$

Q4) déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{3p} a_k$ lorsque $p \to +\infty$ *(on pourra considérer la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable)*. En déduire la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 1} a_k$ et préciser sa somme.

Correction : On fait apparaître une somme de Riemann (d'ordre $2p$) associée à $\varphi \ : \ t \mapsto \frac{1}{1+2t}$ sur $[0,1]$. Comme la fonction est continue sur le segment, on peut appliquer le théorème sur les sommes de Riemann.

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = 2 \left(\frac{1}{2p} \sum_{h=1}^{2p} \varphi\left(\frac{h}{2p}\right) \right) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 2 \int_0^1 \frac{1}{1+2t} \, dt$$

c'est à dire

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{3p} a_k = \ln(3)$$

En notant (A_n) la suite des sommes partielles de la série proposée, on a montré que $A_{3p} \to \ln(3)$. Comme $A_{3p+1} = A_{3p} + a_{3p+1}$ et $A_{3p+2} = A_{3p+1} + a_{3p+2}$ on a aussi convergence vers $\ln(3)$ des extraites (A_{3n+1}) et (A_{3n+2}). Nos trois extraites sont convergentes de même limite et "recouvrent" toute la suite des sommes partielles. On a donc convergence de la série avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \ln(3)$$

Q5) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$ converge et montrer que sa somme est égale à $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Correction : Soit $u_k = \frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$. On a $u_{3p} = \frac{1}{3p}$, $u_{3p+1} = -\frac{1}{2(3p+1)}$ et $u_{3p+2} = -\frac{1}{2(3p+2)}$. Ainsi, $u_p = -\frac{a_p}{2}$. La convergence de $\sum(a_n)$ entraîne celle de $\sum(u_n)$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = -\frac{1}{2}\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

1.3 Etude des séries $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)$ et $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)$.

Pour $t\in]0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\varphi(t) = \dfrac{1}{e^{it}-1}$ et $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$.

On désigne par α un nombre réel fixé dans l'intervalle $]0,2\pi[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera $\pi \leqslant \alpha < 2\pi$.

Q6) Montrer que $S_n(t) = \varphi(t)(e^{i(n+1)t} - e^{it})$.

Correction : $S_n(t)$ est la somme partielle d'une série géométrique de raison $e^{it}\neq 1$ et on a donc

$$S_n(t) = \frac{e^{it}-(e^{it})^{n+1}}{1-e^{it}} = \varphi(t)(e^{i(n+1)t} - e^{it})$$

Q7) Montrer que $\varphi\in\mathscr{C}^1([\pi,\alpha])$.

Correction : On a, pour $t\neq 0[2\pi]$,

$$\varphi(t) = \frac{e^{-it}-1}{|e^{it}-1|^2} = \frac{\cos(t)-1}{(\cos(t)-1)^2+\sin(t)^2} - i\frac{\sin(t)}{(\cos(t)-1)^2+\sin(t)^2}$$

φ est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi,\alpha]$ (ses parties réelle et imaginaire le sont).

Q8) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$ *(on pourra utiliser une intégration par parties)*.

Correction : Une intégration par parties donne

$$\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt = \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\varphi(t)\right]_\pi^\alpha - \frac{1}{i(n+1)}\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi'(t)\,dt$$

φ et φ' sont continues sur le segment $[\pi,\alpha]$ et sont donc donc bornée sur ce segment. En notant M_0 et M_1 des majorants sur ce segment de $|\varphi|$ et $|\varphi'|$, on a alors grossièrement

$$\left|\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2M_0}{n+1} + \frac{(\alpha-\pi)M_1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt = 0$$

Q9) Expliciter $\displaystyle\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt$. Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{e^{ik\alpha}}{k}\right)$.

Expliciter la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\displaystyle\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,dt$.

Correction : Par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_\pi^\alpha e^{ikt}\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\alpha}-e^{ik\pi}}{ik} = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik\alpha}}{k} - \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$$

Le second terme du membre de droite tend vers $i\ln(2)$ (question **Q2)**). On a aussi

$$\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt = \int_\pi^\alpha \varphi(t)e^{i(n+1)t}\,dt - \int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,dt$$

qui tend vers $-\displaystyle\int_{\pi}^{\alpha} e^{it}\varphi(t)\,dt$ quand $n \to +\infty$ (question **Q8)**). On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\alpha}}{k} = -\ln(2) - i\int_{\pi}^{\alpha} e^{it}\varphi(t)\,dt$$

ce qui prouve la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{e^{ik\alpha}}{k}\right)$ et donne la somme de la série.

Q10) Exprimer $e^{it}\varphi(t)$ en fonction de $\dfrac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ où $t \in [\pi, \alpha]$.
Correction : On a, pour $t \neq 0[2\pi]$,

$$e^{it}\varphi(t) = \frac{e^{it/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{e^{it/2}}{2i\sin(t/2)}$$

Q11) En déduire la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)$. Expliciter leur somme respective. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu à la question **Q5)** ?
Correction : En passant aux parties réelle et imaginaire dans le résultat de la question **Q9)** on en déduit que les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)$ convergent et que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} &= -\ln(2) - \int_{\pi}^{\alpha} \mathrm{Re}(ie^{it}\varphi(t))\,dt \\
&= -\ln(2) - \int_{\pi}^{\alpha} \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}\,dt \\
&= -\ln(2) - [\ln(|\sin(t/2)|)]_{\pi}^{\alpha} \\
&= -\ln(2\sin(\alpha/2))
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = -\int_{\pi}^{\alpha} \mathrm{Im}(ie^{it}\varphi(t))\,dt = -\int_{\pi}^{\alpha} \frac{dt}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}$$

Le résultat est cohérent avec celui de **Q5)** puisque $2\sin(\pi/3) = \sqrt{3}$ ($2\pi/3$ n'est pas dans $[\pi, 2\pi[$ mais l'hypothèse importante est seulement $\alpha \neq 0[2\pi]\ldots$).

2 Limite d'une intégrale.

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ soit convergente. On désigne par g une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence) on note $\widetilde{f_g}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(xt)\,dt$ pour $x > 0$.

2.1 Existence de $\widetilde{f_g}(x)$.

On suppose que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Q12) Justifier l'existence de $\widetilde{f_g}(x)$ pour tout $x > 0$. En utilisant la caractérisation séquentielle, montrer que la fonction $\widetilde{f_g}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Correction : On notera M un majorant de $|g|$ sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $x \geqslant 0$. $t \mapsto f(t)g(xt)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et le seul problème d'intégrabilité est celui au voisinage de $+\infty$. Or, $|f(t)g(x,t)| \leqslant M|f(t)|$ et le majorant est intégrable au voisinage de $+\infty$. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et a fortiori, son intégrale $\widetilde{f_g}(x)$ existe. De plus

$$\forall x \geqslant 0,\ |\tilde{f}_g(x)| \leqslant M\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$$

ce qui montre que $\tilde{f}_g$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+$. on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ convergeant vers a.
On pose alors $f_n : t \mapsto f(t)g(x_n t)$

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$
— par continuité de la fonction g la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $t \mapsto f(t)g(at)$.
— pour tout entier n et tout réel positif $|f_n(t)| \leqslant M\,|f(t|$. Or la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion : d'après le théorème de convergence dominée on en déduit que $\left(\tilde{f}_g(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{f}_g(a)$, donc $\tilde{f}_g$ est continue en a. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.2 Limite de $\widetilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$.

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles. Soit $\widetilde{f}_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt$.

Q13) Justifier l'affirmation :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{, il existe un réel positif } A \text{ tel que } \int_A^{+\infty} |f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$$

Correction : D'après l'existence de l'intégrale de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\displaystyle\int_0^a |f(t)|\,dt$ qui tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ quand $a \to +\infty$. En revenant à la définition de la limite, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \geqslant 0 /\ \forall a \geqslant A,\ \left|\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \varepsilon$$

On a a fortiori le résultat demandé (pour $\varepsilon > 0$ donné le A précédent convient).

Q14) Le nombre réel A étant fixé, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ *(on pourra utiliser une intégration par parties).*

Correction : Une intégration par parties donne, pour $x > 0$,

$$\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt = \frac{f(A)e^{ixA} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^A f'(t)e^{ixt}\,dt$$

f' est continue sur le segment $[0, A]$ et donc bornée sur ce segment. Une majoration grossière donne alors

$$\left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt\right| \leqslant \frac{|f(A)| + |f(0)|}{x} + \frac{A\|f'\|_{\infty,[0,A]}}{x}$$

Le majorant étant de limite nulle quand $x \to +\infty$, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt = 0$$

Q15) En déduire la limite de $\widetilde{f}_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. La question **2.1** donne un A. La question **II.2.2** donne alors un x_0 au delà duquel $\left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt\right| \leqslant \varepsilon$. On a alors

$$\forall x \geqslant x_0,\ \left|\tilde{f}_g(x)\right| \leqslant \left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt\right| + \int_A^{+\infty} |f(t)| \leqslant 2\varepsilon$$

Par définition des limites, on a donc montré que

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}_g(x) = 0$$

Dans toute la suite, on suppose $g(t) = |\sin(t)|$ et on note simplement

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t$$

2.3 Etude pour une fonction f particulière.

On suppose (dans cet exemple) que f désigne la fonction E définie par $E(t) = e^{-t}$ pour $t \geqslant 0$, et donc $\widetilde{E}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

Q16) Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma) = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{\gamma y}\sin(y)\,\mathrm{d}y$.

Correction : On peut procéder par double intégration par partie ou (c'est l'option choisie ici) transiter par l'exponentilelle complexe.

$$\theta(\gamma) = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{y(\gamma+i)}\,dy\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-e^{\pi\gamma}-1}{\gamma+i}\right) = \frac{1+e^{\pi\gamma}}{1+\gamma^2}$$

Q17) Montrer que pour $x > 0$,

$$\widetilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u$$

Correction : Le changement de variable $u = tx$ donne

$$\forall a \geqslant 0,\ \int_0^{a} e^{-t}|\sin(xt)|\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{ax} e^{-u/x}|\sin(u)|\,du$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, $ax \to +\infty$ car $x > 0$ et les différentes intégrales existent ($g = |\sin|$ est bornée). On obtient,

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,du$$

Q18) Exprimer pour $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.

Correction : Le changement de variable $v = u - k\pi$ donne

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,du = \int_0^{\pi} e^{-\frac{v+k\pi}{x}}|\sin(v)|\,dv = e^{-\frac{k\pi}{x}}\,\theta\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Q19) Justifier, pour $x > 0$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(e^{-\frac{k\pi}{x}})$. Préciser sa somme.

Correction : La série proposée est la série géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{x}}$. Sa raison est dans $]-1,1[$ et la série converge avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}$$

Q20) Expliciter $\widetilde{E}(x)$ pour $x > 0$. Déterminer la limite de $\widetilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Correction : $\tilde{E}(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,du$. Par relation de Chasles et avec les questions précédentes, on a donc

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}}\,\theta\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+\pi^2}\,\frac{1+e^{-\frac{\pi}{x}}}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}$$

Quand x tend vers $+\infty$, on a $1 - e^{-\frac{\pi}{x}} \sim \dfrac{\pi}{x}$ ce qui permet de lever l'indéterminantion quand on passe à la limite et d'obtenir

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}$$

2.4 Etude générale.

On désigne de nouveau par f une fonction quelconque continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge et on note

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\, dt \quad \text{pour} \quad x > 0$$

21) Lemme préliminaire.

Pour tout réel t tel que la série $\sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}\right)$ converge, on pose $h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$. Montrer que la fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Correction : Notons $h_k \;:\; t \mapsto \frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$. (h_k) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $\|h_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{4k^2-1}$ qui est le terme général d'une série convergente. $\sum(h_k)$ est ainsi normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et, par théorème de continuité des sommes de séries de fonctions,

$$h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+)$$

On admet l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t)$$

22) Limite de $\widetilde{f}(x)$ dans le cas $\mathscr{C}^1$.

On suppose de plus que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. En utilisant les résultats obtenus dans la partie **2.2** et la question précédente, déterminer la limite de $\widetilde{f}(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Le résultat est-il conforme à celui obtenu pour la fonction E ?

Correction : On a ainsi $\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(xt)\right) dt$ et comme f est intégrable, on peut découper l'intégrale en deux pour obtenir

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\, dt - \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\, dt$$

$x > 0$ étant fixé, par définition de h, on a

$$\forall t \geqslant 0,\ f(t)h(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(t)\cos(2kxt)}{4k^2-1}$$

$H_k \;:\; t \mapsto \frac{f(t)\cos(2kt)}{4k^2-1}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\sum(H_k)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $t \mapsto f(t)h(xt)$ elle même continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus $|H_k(t)| \leqslant \frac{|f(t)|}{4k^2-1}$ montre que H_k est intégrable avec

$$\int_0^{+\infty} |H_k(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$$

qui est le terme général d'une série convergente. Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et permet d'écrire que

$$\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\cos(2kxt)}{4k^2-1}\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\, dt\right)$$

Posons maintenant $F_k(x) = \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\, dt = \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(\frac{u}{2k})\cos(ux)\, du$ (on a posé $u = 2kt$).

- D'après la partie **II.2**, comme $u \mapsto f\left(\frac{u}{2k}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ alors $F_k(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (on passe du résultat avec e^{ix} à celui avec $\cos(x)$ en passant à la partie réelle).
- $\forall x > 0,\ |F_k(x)| \leqslant \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. $\sum(F_k)$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et donc au voisinage de $+\infty$).

Le théorème de double limite s'applique et indique que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,dt = 0$$

En combinant tout cela on obtient finalement que

$$\lim_{x\to+\infty}\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$, ceci est compatible avec le résultat pour $\tilde{E}$.

23) Cas d'une fonction continue par morceaux.

a) Une limite.

Etant donnés deux nombres réels β et δ tels que $0 \leqslant \beta < \delta$, on considère, pour $x > 0$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_\beta^\delta |\sin(xt)|\,dt$. Montrer que $F(x) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)|\,du$.

On pose p la partie entière de $\dfrac{\beta x}{\pi}$ et q celle de $\dfrac{\delta x}{\pi}$. Pour $x > \dfrac{\pi}{\delta-\beta}$, donner un encadrement de $F(x)$ en fonction de p, q et x.

En déduire que $F(x)$ tend vers $\frac{2}{\pi}(\delta-\beta)$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction : Il suffit de poser $u = xt$ pour obtenir

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)|\,du$$

Par définition de p et q, on a $p\pi \leqslant \beta x < (p+1)\pi$ et $q\pi \leqslant \delta x < (q+1)\pi$.

Si $x > \dfrac{\pi}{\delta-\beta}$ alors $\delta x - \beta x > \pi$; or, $q\pi - (p+1)\pi > \delta x - \beta x$ et donc $q-p+1 > 1$ ou encore $q > p$. On effectue, avec la relation de Chasles, le découpage suivant :

$$xF(x) = \int_{\beta x}^{(p+1)\pi} |\sin(u)|\,du + \sum_{k=p+1}^{q-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\,du + \int_{q\pi}^{\delta x} |\sin(u)|\,du$$

Par π-périodicité de $|\sin|$, le terme du milieu vaut $(q-p-1)\int_0^\pi |\sin(u)|\,du = 2(q-p-1)$. Les bornes des intégrales étant dans le bon sens, on peut majorer (resp. minorer) les premier et troisième termes en majorant (resp. minorant) $|\sin(u)|$ par 1 (resp 0). On a alors

$$2(q-p-1) \leqslant xF(x) \leqslant 2(q-p-1) + ((p+1)\pi - \beta x) + (\delta x - q\pi) \leqslant 2(q-p-1) + 2\pi$$

De plus $\dfrac{\delta x}{\pi} - 1 - \dfrac{\beta x}{\pi} - 1 \leqslant q-p-1 \leqslant \dfrac{\delta x}{\pi} - \dfrac{\beta x}{\pi}$ et donc

$$\frac{2(\delta-\beta)}{\pi} - \frac{2}{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{2(\delta-\beta)}{\pi} + \frac{2\pi}{x}$$

Par théorème d'encadrement, on a finalement

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{2}{\pi}(\delta-\beta)$$

b) Limite de $\widetilde{f}(x)$ dans le cas d'une fonction continue par morceaux.

Si J est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et si f est une fonction continue par morceaux sur J à valeurs réelles et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_J |f(t)|\,dt$ existe, on note toujours

$$\widetilde{f}(x) = \int_J f(t)|\sin(tx)|\,dt$$

Quelle est la limite de $\widetilde{f}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$:

- lorsque J est un segment et f une fonction en escalier ?
- lorsque J est un segment et f une fonction continue par morceaux ?
- lorsque $J = \mathbb{R}^+$ et f une fonction continue par morceaux ?

Correction :

- Si f est en escalier sur $J = [a,b]$, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ telle que f est constante (égale à c_i) sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a alors

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\sin(xt)|\ dt \underset{x\to+\infty}{\to} \sum_{k=0}^{p-1} c_k \frac{2(a_{k+1}-a_k)}{\pi}$$

Par ailleurs,

$$\int_J f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{p-1} c_k(a_{k+1}-a_k)$$

et finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\ dt$$

- Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, f est uniformément approchable sur $[a,b]$ par une suite de fonctions en escalier. Soit $\varepsilon > 0$; il existe φ, fonction en escalier, telle que $\|f-\varphi\|_{\infty,J} \leqslant \varepsilon$. D'après le premier cas, il existe x_0 tel que si $x > x_0$, $\left|\tilde{\varphi}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J \varphi\right| \leqslant \varepsilon$. Pour $x > x_0$, on a alors

$$\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\ dt\right| \quad \leqslant \quad \left|\tilde{f}(x) - \tilde{\varphi}(x)\right| + \left|\tilde{\varphi}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J \varphi\right| + \left|\frac{2}{\pi}\int_J \varphi \frac{2}{\pi} - \int_J f\ dt\right|$$

Par choix de x, le second morceau est plus petit que ε. Le troisème est plus petit que $\frac{2}{\pi}|b-a|\varepsilon$. Le premier est majoré par $\displaystyle\int_a^b |f(t)-\varphi(t)|\ dt$ et donc par $(b-a)\varepsilon$. On a donc

$$\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\ dt\right| \leqslant \left(\frac{2}{\pi}|b-a| + |b-a| + 1\right)\varepsilon$$

En revenant à la définition des limites, on a montré que

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\ dt$$

- Supposons f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. Soit $\varepsilon > 0$; comme en **2.1** on trouve un A tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\ dt \leqslant \varepsilon$. D'après le cas précédent, il existe x_0 tel que si $x > x_0$ on a $\left|\displaystyle\int_0^A f(t)|\sin(xt)|\ dt - \frac{2}{\pi}\int_0^A f\right| \leqslant \varepsilon$. Pour $x > x_0$, on a alors

$$\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\ dt\right| \leqslant \int_A^{+\infty} |f(t)| + \left|\int_0^A f(t)|\sin(xt)|\ dt - \frac{2}{\pi}\int_0^A f\right| + \frac{2}{\pi}\int_A^{+\infty} |f|$$

Avec les choix faits, on a a ;ors

$$\left|\tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\ dt\right| \leqslant \left(2 + \frac{2}{\pi}\right)\varepsilon$$

En revenant à la définition des limites, on a montré que

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$$

Sujet de type Mines

Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

A Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u$$

1) Démontrer que $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrale sur I.

Correction : La fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur I comme composée de fonctions continues.

On a $\psi(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1/2}}$ or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $\frac{1}{2} < 1$
Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $]0,1]$
De plus par croissance comparée $u^2\psi(u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\psi(u) = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$
or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $2 > 1$
Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$
Ainsi $\boxed{\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \text{ est intégrale sur } I}$ En particulier, on en déduit l'existence de K.

2) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.

Correction : On pose $f_x : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{(u+x)\sqrt{u}}$

— Si $x < 0$, la fonction f_x n'est pas continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ donc $F(x)$ n'est pas définie.
On peut préciser que de plus $\displaystyle\int_0^{-x} f(u)du$ *et* $\displaystyle\int_{-x}^{+\infty} f(u)du$ *ne sont pas définies car* $f(u) \underset{u\to-x}{\sim} \dfrac{C}{u+x}$

— Si $x = 0$, la fonction f_x n'est pas intégrable sur $]0,1]$ car $f_x(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{3/2}}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann).

— Si $x > 0$, la fonction f_x est positive et pour tout $u \in I$, $f_x(u) \leqslant \dfrac{1}{x}\psi(u)$. Comme ψ est intégrable sur I (question 1.), f_x est intégrable sur I.

On en déduit que la fonction F est définie sur $I =]0,+\infty[$.

3) A l'aide de la caractérisation séquentielle montrer que F est continue sur I.

Correction : soit $a \in I$. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{(u+x_n)\sqrt{u}}$. Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et la suite de fonctions converge simplement vers $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{(u+a)\sqrt{u}}$.
Soit $\delta > 0$ tel que $[a-\delta, a+\delta] \subset I$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe N tel que pour tout $n > n$ x_n est dans $[a-\delta, a+\delta]$.
On a alors pour tout entier $n > N$ et tout u dans $\mathbb{R}_+^*$, $|f_n(u)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{(u+a-\delta)\sqrt{u}}$. Or la fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{(u+a-\delta)\sqrt{u}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit, par le théorème de convergence dominée, que la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(a)$.
Conclusion : par caractérisation séquentielle la fonction F est continue en a, ceci pour tout a de $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) **Question à admettre** Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.

Réponse : $F' : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2} \mathrm{d}u$

5) En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$.
Correction : Soit $x \in I$. Calculons $F(x)$ par intégration par parties.

$$F(x) = \left[\frac{2\sqrt{u}e^{-u}}{x+u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{u}e^{-u}}{x+u}du + \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{u}e^{-u}}{(x+u)^2}du$$

Toutes les intégrales sont bien définies car $F(x)$ est défini et que le « crochet » vaut 0 d'après les limites usuelles. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}du + 2\int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{(x+u)^2\sqrt{u}}du \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du - 2x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}du + 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}du - 2x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{(x+u)^2\sqrt{u}}du \\ &\quad \text{en écrivant } u = (u+x) - x \text{ dans les deux termes} \\ &= 2K - 2xF(x) + 2F(x) + 2xF'(x) \end{aligned}$$

Finalement on obtient bien $\boxed{xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K}$.

6) Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
Correction : La fonction $G : x \mapsto \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x}\right)F(x) + \sqrt{x}e^{-x}F'(x) \\ &= \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x)\right) \\ &= -K\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

De ce fait, comme G' est continue et que I est un intervalle, en intégrant, il existe une constante C telle que $\forall x \in I, G(x) = C - K\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{t}dt$.

7) Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.
Correction :
— Calculons la limite de G en $+\infty$. La fonction F est positive (par positivité de l'intégrale) et décroissante (car la dérivée est négative) donc elle tend vers une limite finie ℓ en $+\infty$. De ce fait, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$.
D'autre part, en utilisant la formule trouvée à la question **6)**. on obtient que $G(x)$ tend vers $C - K^2$ lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit que $\boxed{C = K^2}$.
— Calculons maintenant la limite de G en 0. Comme e^x tend 1 lorsque x tend vers 0, on peut se contenter de calculer la limite de $\sqrt{x}F(x)$. On effectue le changement de variable affine $u = xt$ licite car cela définie une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même et est de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\sqrt{x}F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}e^{-xt}}{\sqrt{xt}(xt+x)}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}dt$$

On peut alors faire tendre x vers 0.
On utilise encore la caractérisation séquentielle de la limite à ce stade de l'année mais voici la version utilisable en concours :
On applique pour ce faire la version continue du théorème de convergence dominée. En effet pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$ tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$ quand x tend vers 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue (par morceau) sur I et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in I$,

$$\left|\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

où $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$ est intégrable sur I. On en déduit que

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}dt$$

Maintenant, cette dernière intégrale se calcule en posant $v = \sqrt{t}$: la fonction $t \in]0, +\infty[\mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement monotone et induit une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui même). On obtient,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \int_0^{+\infty} \frac{2dv}{(1+v^2)} = 2\left[\arctan(v)\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

D'autre par en reprenant la formule trouvée en à la question **6)**. on obtient que $G(x)$ tend C lorsque x tend vers 0.

En conclusion $K^2 = C = \pi$ et donc $\boxed{K = \sqrt{\pi}}$.

B Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$.

8) Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

Correction :

— Soit $x \in I$, la série $\sum e^{-nx}$ converge car $e^{-nx} = (e^{-x})^n$ et que $|e^{-x}| < 1$ (série géométrique). De plus, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leqslant e^{-nx}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ converge aussi. La fonction f est définie sur I.

Maintenant pour tout entier n, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ est continue. De plus, pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ est bornée sur $[a, +\infty[$ et

$$\left\| x \mapsto \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \right\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{e^{-na}}{\sqrt{n}}$$

Comme la série $\sum \dfrac{e^{-na}}{\sqrt{n}}$ la série de fonction définissant n converge normalement donc uniformément sur tout segment de I d'où f est continue.

— Soit $x \in I$, à partir d'un certain rang, $\sqrt{n}e^{-nx} \leqslant e^{-nx/2}$ car $\sqrt{n}e^{-nx/2}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et est donc inférieur à 1 à partir d'un certain rang. De ce fait, en procédant comme ci-dessus, on montre que g est aussi définie et continue sur I.

9) Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

Correction : Soit $x \in I$, on étudie $\theta : u \mapsto \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$. Elle est décroissante car $u \mapsto e^{-ux}$ est une fonction décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et que $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ aussi. On peut donc utiliser la méthode de comparaison série-intégrale. Précisément, pour tout entier N,

$$\int_1^{N-1} \theta(u)du \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{N} \theta(u)du$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient,

$$\int_1^{+\infty} \theta(u)du \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} = f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \theta(u)du.$$

Notons que les intégrales convergent d'après la question 1.

On pose $v = ux$ dans les deux intégrales et on obtient que

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}dv = \frac{1}{x}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v/x}}dv \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v/x}}dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}dv$$

Par encadrement, on en déduit que $\sqrt{x}f(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}dv$ lorsque x tend 0, ce qui est égal à $\sqrt{\pi}$ d'après la question `7)`.

En conclusion $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}}$.

10) Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Correction : On pose pour $k \geqslant 1$, $v_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{\sqrt{k}} - 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$. On a donc, par téléscopage, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur I et décroissante. De ce fait, pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{k-1}} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{t}}dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$. Cela implique que (pour $k \geqslant 2$)

$$0 \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

La série $\sum v_k$ est donc une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant v_1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 + v_1.$$

On en déduit que la série $\sum v_k$ converge et donc $\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

11) Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

Correction : Soit $x \in I$. Pour tout $N \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} &= \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{n=k}^{N}e^{-nx} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{1}{1-e^{-x}}\left(e^{-kx} - e^{-(N+1)x}\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-x}}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-kx} - e^{-(N+1)x}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)
\end{aligned}$$

La première partie est une série convergente qui tend vers $\dfrac{1}{1-e^{-x}}f(x)$. La deuxième partie tend vers 0, en effet, d'après la question précédente, les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ sont équivalentes à $2\sqrt{n}$ et $2\sqrt{n}e^{-(N+1)x}$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

En conclusion $\boxed{\text{la série converge et sa somme } h(x) \text{ vaut } h(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}f(x).}$

On pouvait aussi utiliser un produit de Cauchy.

12) En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

Correction : En utilisant les résultats des questions **9)** et **11)**, on obtient que $\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}.}$

Maintenant, on pose (α_n) la suite définie à la question **10)**. par $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

On a donc pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-nx}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2\sqrt{n} + \alpha_n) e^{-nx} \\ &= 2g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \text{ car les deux séries convergent} \end{aligned}$$

Maintenant, on a vu à la question 9. que (α_n) était une suite positive, croissante et convergente. Si on note A sa limite, on a pour tout $x \in I$,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\right| \leqslant A\left|\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\right| = \frac{A}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{A}{x}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} = \underset{x\to 0}{O}\left(\frac{1}{x}\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Finalement, $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$.

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \displaystyle\lim_{x\to 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

13) Quel est l'ensemble I_a si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

Correction : Si A est fini alors la suite (a_n) est presque nulle. De ce fait, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, la série $(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx})$ converge. On a alors $\boxed{I_A = \mathbb{R}_+}$.

On suppose que A est infini. On veut construire une extractrice, φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier n, $b_n = a_{\varphi(n)} = 1$. Pour cela on pose $\varphi(0) = \min A$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $\varphi(n+1) = \min(A \cap]\varphi(n), +\infty[)$. La définition à bien un sens, car pour tout entier n, $A \cap]\varphi(n), +\infty[$ est une partie non vide (car A est infini) de $\mathbb{N}$ qui admet donc un plus petit élément. Par construction, on a bien que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc φ est strictement croissante et $a_{\varphi(n)} = 1$ car $\varphi(n) \in A$.

Dans le cas où A est infini, si $x = 0$ la série $(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n)$ diverge car sinon les sommes partielles seraient majorées ce qui impliquerait que A serait fini. Maintenant pour $x > 0$, on a pour tout entier N, $\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-nx} \leqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-nx} \leqslant \dfrac{1}{1-e^{-x}}$. La série est donc une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées. Elle converge. $\boxed{\text{On a donc } I_A = \mathbb{R}_+^* = I}$.

14) Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \operatorname{Card}(A(n))\,\mathrm{e}^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Card}(A(n))\,\mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

Correction : Soit $x \in S$. Pour tout entier n, on a par définition de $A(n)$, $\operatorname{Card}(A(n)) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. On en déduit que pour tout entier N

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \operatorname{Card}(A(n)) e^{-nx} &= \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-nx}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{n=k}^{N} e^{-nx}\\
&= \frac{1}{1-e^{-x}}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-kx} - (\sum_{k=0}^{N} a_k) e^{-(N+1)x}\right)
\end{aligned}$$

Maintenant, quand $N \to +\infty$, le premier terme tend vers $\dfrac{1}{1-e^{-x}} f_A(x)$ et le deuxième terme tend vers 0 car il est majoré par $(N+1)e^{-(N+1)x}$ qui tend vers 0 quand N. En conclusion, la série converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Card}(A(n)) e^{-nx} = \dfrac{1}{1-e^{-x}} f_A(x)$.

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

15) Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor\,\mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

En déduire un encadrement de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Correction : Soit $x > 0$. Soit $n \geqslant 0$, $A_1(n) = \{1, 4, 9, \cdots, p^2\}$ où $p^2 \leqslant n$ et $(p+1)^2 > n$. C'est-à-dire que $p \leqslant \sqrt{n} < p+1$. On en déduit que $\operatorname{Card}(A_1(n)) = p = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Dès lors, en utilisant **14)**. on obtient que

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Card}(A_1(n)) e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}.$$

Maintenant, par définition de la partie entière, pour tout entier n,

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor \leqslant \sqrt{n} \leqslant \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$$

d'où,

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} = g(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1) e^{-nx} = \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} + \frac{1}{1-e^{-x}}$$

En conclusion,

$$0 \leqslant g(x) - \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

On utilise alors l'équivalent trouvé à la question 11. On a que

$$0 \leqslant x^{3/2} g(x) - \frac{x^{3/2} f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{x^{3/2}}{1-e^{-x}}.$$

Comme le terme de droite tend vers 0 car il est équivalent en 0 à $\sqrt{x}$ et que $x^{3/2}g(x)$ tend vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ lorsque x tend vers 0. On en déduit (par encadrement) que $\dfrac{x^{3/2}f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}$ tend vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ lorsque x tend vers 0 et finalement $\boxed{f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$

On en déduit que $xf_{A_1}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et donc que $A_1 \in S$ et $\Phi(A_1) = 0$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitués des entiers qui sont la sommes des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

16) Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v(n)\,\mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\,\mathrm{e}^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

Correction : Pour tout entier n, on pose $v(n)$ le nombre de couples d'entiers (p, q) pour lesquels, $p^2 + q^2 = n$. Si on pose (a_n) la suite définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré parfait} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

on a que pour tout entier n, $v(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. En effet on parcourt tous les couples $(k, n-k)$ et on teste si k et $n-k$ sont des carrées parfaits.

Maintenant pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\,\geqslant\,0} a_n e^{-nx}$ est une série positive convergente (et donc absolument convergente). D'après la formule du produit de Cauchy, la série $\sum\limits_{n\,\geqslant\,0} w(n)$ converge aussi où pour tout entier n,

$$w(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx}.a_{n-k}e^{-(n-k)x} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) e^{-nx} = v(n)e^{-nx}$$

De plus la somme est donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}\right)^2 = (f_{A_1}(x))^2.$$

Maintenant, si on considère (b_n) la suite définie par l'ensemble A_2, on a donc pour tout entier n, $b_n \leqslant v(n)$, car dès que b_n vaut 1 alors $v(n)$ vaut au moins 1. On en déduit directement que pour tout $x > 0$,

$$f_{A_2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{-nx} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$

Par suite, $xf_{A_2}(x) \leqslant x(f_{A_1}(x))^2$. En réutilisant l'équivalent, $f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ trouvé à la question 15, on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} x(f_{A_1}(x))^2 = \dfrac{\pi}{4}$. En admettant que $A_2 \in S$ et en passant à la limite, on obtient que $\boxed{\Phi(A_2) \leqslant \dfrac{\pi}{4}.}$

D) Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n\,\mathrm{e}^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\,\mathrm{e}^{-nx}\right) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0, 1]$. On munit E de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \, \mathrm{e}^{-nx} \, \psi(\mathrm{e}^{-nx}).$$

17) Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F. Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E_1, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

Correction : Soit $\psi \in E$. C'est une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$. Elle est en particulier bornée. De ce fait, pour tout $x > 0$, la fonction $L(\psi)$ est définie en x, en effet la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})$ est absolument convergente donc convergente car pour tout entier n,

$$|\alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})| \leqslant ||\psi||_\infty \alpha_n e^{-nx}$$

et la série $(\sum\limits_{n \geqslant 0} \alpha_n e^{-nx})$ est convergente par hypothèse.

L'application L est linéaire d'après la linéarité de la somme des séries.

De plus si $\psi_1 \leqslant \psi_2$ alors pour tout $x > 0$ et pour tout entier n,

$$\alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx}) \leqslant \alpha_n e^{-nx} \psi_2(e^{-nx})$$

car $\alpha_n e^{-nx} \geqslant 0$. En passant à la somme $L(\psi_1)(x) \leqslant L(\psi_2)(x)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim\limits_{x \to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x \to 0} x(L(\psi))(x)$$

18) Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \| \, \|_\infty)$.

Correction : La fonction nulle $\mathbf{0}$ appartient à E_1 car $L(\mathbf{0})$ est la fonction nulle. De plus, si ψ_1 et ψ_2 appartiennent à E_1 et si λ, μ sont deux scalaires, on pose $\psi' = \lambda \psi_1 + \mu \psi_2$. On a alors pour tout $x > 0$,

$$x(L(\psi'))(x) = \lambda x(L(\psi_1))(x) + \mu x(L(\psi_2))(x)$$

Quand $x \to 0$, les deux termes ont une limite finie par définition (à savoir $\lambda \Delta(\psi_1)$ et $\mu \Delta(\psi_2)$). Donc $x(L(\psi'))(x)$ a une limite finie et de ce fait, $\psi' \in E_1$.

On a bien montré que E_1 était un sous-espace vectoriel de E.

De plus, on vient de voir qu'avec les notations précédentes, $\Delta(\lambda \psi_1 + \mu \psi_2) = \lambda \Delta(\psi_1) + \mu \Delta(\psi_2)$ ce qui signifie que Δ est une forme linéaire.

Il reste à montrer que Δ est continue sur $(E_1, ||.||_\infty)$.

Soit $\psi \in E_1$, d'après les calculs de la question **17)**, pour tout $x > 0$,

$$|x(L(\psi))(x)| = x \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx}) \right| \leqslant x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} ||\psi||_\infty$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient alors que

$$|\Delta(\psi)| = |\lim_{x \to 0} x(L(\psi))(x)| \leqslant \ell ||\psi||_\infty.$$

Cela implique bien que $\boxed{\text{la fonction } \Delta \text{ est une forme linéaire continue sur } (E_1, ||.||_\infty).}$

19) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0,1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Correction : On pose $e_p : t \mapsto t^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

— Pour $p = 0$, on a pour tout $x > 0$, $(L(e_0))(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$. De ce fait, $e_0 \in E_1$ et

$$\Delta(e_0) = \lim_{x \to 0} x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} = \ell$$

par hypothèse.

— Pour $p>0$, on a pour tout $x>0$,

$$(L(e_p))(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx}(e^{-nx})^p=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx(1+p)}=(L(e_0))((p+1)x).$$

On en déduit que

$$x(L(e_p))(x)=\frac{1}{p+1}.(p+1)x(L(e_0))((p+1)x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{\ell}{p+1}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } p\in\mathbb{N},\ e_p\in E_1 \text{ et } \Delta(e_p)=\frac{\ell}{p+1}.}$

On en déduit par linéarité que pour toute fonction polynomiale P sur $[0,1]$, $P\in E_1$ et $\Delta(P)=\ell\int_0^1 P(t)dt$ car pour tout entier $p\in\mathbb{N}$, $\Delta(e_p)=\ell\int_0^1 e_p(t)dt$.

Maintenant, si ψ est une fonction continue sur $[0,1]$, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_k) de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ qui converge uniformément vers ψ.

Posons, pour tout entier k, $F_k : x\mapsto x(L(P_k))(x)$ et $F : x\mapsto x(L(\psi))(x)$. En reprenant les calculs précédent, on obtient que pour tout $x>0$,

$$|F_k(x)-F(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}x\alpha_n e^{-nx}||P_k-\psi||_\infty=||P_k-\psi||_\infty x(L(e_0))(x).$$

Maintenant, pour tout $a>0$, la série de fonctions $\sum\alpha_n e^{-nx}$ converge normalement sur $[a,1]$ donc la fonction $x\mapsto L(e_0)(x)$ est continue sur $]0,1[$. Il en est de même pour $x\mapsto x(L(e_0))(x)$. Cette dernière se prolonge par continuité en 0 (car elle tend vers ℓ en 0). En particulier, elle est alors continue sur $[0,1]$ et donc bornée. Cela permet de déduire que (F_k) converge uniformément sur $]0,1]$ vers F. Comme de plus, par hypothèse, pour tout $k\geqslant 0$, $\lim_{x\to 0}F_k(x)=\Delta(P_k)$. D'après le théorème de la double limite, la suite $(\Delta(P_k))$ converge (on le savait déjà) et

$$\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{k\to+\infty}\Delta(P_k).$$

Cela signifie que ψ appartient à E_1 et que

$$\Delta(\psi)=\lim_{k\to+\infty}\Delta(P_k)=\lim_{k\to\infty}\ell\int_0^1 P_k(t)dt=\ell\int_0^1\psi(t)dt.$$

La dernière égalité découle du fait que (P_k) converge uniformément vers ψ.

Pour tous $a,b\in[0,1]$ tel que $a<b$, on note $1_{[a,b]} : [0,1]\to\{0,1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Soit $a\in]0,1[$ et $\varepsilon\in]0,\min(a,1-a)[$. On note

$$g_-(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,a-\varepsilon]\\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x\in]a-\varepsilon,a[\\ 0 & \text{si } x\in[a,1]\end{cases}$$

et

$$g_+(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,a]\\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x\in]a,a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x\in[a+\varepsilon,1].\end{cases}$$

20) Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]}\in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0,a]})$. En déduire que $E_1=E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi\in E$.

Correction : Les fonctions g_+ et g_- sont affines par morceaux, de plus,

$$\lim_{x\to(a_\varepsilon)^+}g_-(x)=\frac{a-(a-\varepsilon)}{\varepsilon}=1;\ \lim_{x\to a^-}g_-(x)=\frac{a-a}{\varepsilon}=0.$$

On en déduit que g_- est continue sur $[0,1]$. De même pour g_+.

On a donc

$$\Delta(g_-) = \ell \int_0^1 g_-(t)dt = \ell \left(\int_0^{a-\varepsilon} 1dt + \int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{a-t}{\varepsilon} dt + \int_a^1 0dt \right) = \ell \left[(a-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \right] = \ell(a - \frac{\varepsilon}{2}).$$

Un calcul similaire, donne $\Delta(g_+) = \ell\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$.
On remarque alors que pour tout $\varepsilon > 0$, $g_- \leqslant 1_{[0,a]} \leqslant g_+$. De ce fait, en utilisant 16. on obtient que pour tout $x > 0$,

$$x(L(g_-))(x) \leqslant x(L(1_{[0,a]}))(x) \leqslant x(L(g_+)(x)).$$

Maintenant,

$$\lim_{x \to 0} x(L(g_-))(x) = \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

alors il existe η_- tel que $x \leqslant \eta_-$ implique $x(L(g_-))(x) \geqslant \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \ell\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \ell\,(a-\varepsilon)$. On procédant de même on obtient η_+ tel que $x < \eta_+$ implique $x(L(g_+))(x) \leqslant \ell\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \ell\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \ell\,(a+\varepsilon)$. En prenant $\eta = \min(\eta_-, \eta_+)$ on obtient que pour $x < \eta$,

$$\ell\,(a-\varepsilon) \leqslant x(L(g_-))(x) \leqslant x(L(1_{[0,a]}))(x) \leqslant x(L(g_+)(x)) \leqslant \ell\,(a+\varepsilon).$$

Ceci étant vrai pour tout ε, $x(L(1_{[0,a]}))(x)$ tend vers $a\ell$ lorsque x tend vers 0 donc $1_{[0,a]} \in E_1$ et

$$\Delta(1_{[0,a]}) = a\ell = \ell \int_0^1 1_{[0,a]}(t)dt.$$

Soit $a \in [0,1]$, en procédant comme ci-dessus, avec h_- la fonction nulle et h_+ la fonction définie par

$$h_+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{-a+\varepsilon+x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in]a+\varepsilon, 1] \end{cases}$$

on montrer que $\delta_a : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est aussi dans E_1 et telle que $\Delta(\delta_a) = 0$. De ce fait en modifiant une fonction ψ d'un nombre fini de valeurs, on ne modifie pas l'appartenance (ou la non appartenance) à E_1 pas plus que la valeur de $\Delta(\psi)$
Maintenant, pour $(a,b) \in [0,1]^2$, on remarque $1_{]a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a]}$. De ce fait, par linéarité, les fonctions en escalier appartiennent à E_1.
Finalement, pour toute fonction ψ continue par morceaux et tout $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe ψ_- et ψ_+ des fonctions en escaliers telles que $\psi_- \leqslant \psi \leqslant \psi_+$ et $\psi_+ - \psi_- \leqslant \varepsilon$. On peut alors procéder comme ci-dessus pour montrer que $\psi \in E_1$ et que $\Delta(\psi) = \ell \displaystyle\int_0^1 \psi(t)dt$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{\mathrm{e}}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{\mathrm{e}}, 1]. \end{cases}$$

21) Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

Correction : Soit $N > 0$, $(L(\psi))(\frac{1}{N}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N})$. Or on a

$$e^{-n/N} \geqslant e^{-1} \iff \frac{n}{N} \leqslant 1 \iff n \leqslant N$$

De ce fait,

$$(L(\psi))(\frac{1}{N}) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-n/N} \frac{1}{e^{-n/N}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n.$$

On vient de voir (question 19.) que la fonction ψ qui est continue par morceaux appartient à E_1 et que

$$\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)dt = \ell \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t}dt = \ell.$$

Comme $\Delta(\psi) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}(L(\psi))(\frac{1}{N})$, on obtient finalement que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} \alpha_k = \ell.$$

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) tels que $n = p^2 + q^2$.

22) Si $A \in S$, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{Card}\,(A(n))$? Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} v(k)$.

Correction : Soit $A \in S$. On considère la suite (a_n) définie au début de la partie C. On a alors pour tout entier n, $\mathrm{Card}(A(n)) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Comme $A \in S$, on a vu que pour tout $x > 0$, la série $(\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx})$ converge (vers $f_A(x)$) et on suppose que $xf_A(x)$ tend vers $\Phi(A)$ lorsque x tend vers 0. On peut donc appliquer les résultats de la partie D avec $\ell = \Phi(A)$ et on obtient donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}(A(n)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k = Phi(A).$$

En appliquant les résultats précédent à la suite $(v(n))$, on a vu que pour tout $x > 0$,

$$x\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = x(f_{A_1}(x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} x.\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\right)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v(k) = \frac{\pi}{4}.$$