Devoir surveillé n°5

MP Clemenceau 2022-23

Jeudi 12 janvier 2023

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence ! !

Vous avez le choix entre deux sujets : un sujet de type CCINP ou un sujet de type Mines.
Vous ne devez choisir et commencer qu'un seul sujet.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie et de numéroter ces dites copies.

Les calculatrices sont interdites.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

★ ★
★

Sujet de type CCINP

Notations.

On note
 J un intervalle de $[0,+\infty[$.
 f une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
 g une fonction définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous réserve de son existence, on note $\widetilde{f}_g(x) = \displaystyle\int_J f(t)g(xt)\,\mathrm{d}t$ pour $x>0$.

Chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\widetilde{f}(x)$ au lieu de $\widetilde{f}_g(x)$.

Objectifs.

Pour différentes hypothèses sur la fonction f, sur l'intervalle J et pour deux choix de g, on se propose de déterminer la limite de $\widetilde{f}_g(x)$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.
Dans la partie **1**, on étudie un exemple explicite avec application à des calculs de sommes de séries.
Dans la partie **2**, on considère une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles et l'objectif est d'obtenir la limite en $+\infty$ de $\widetilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = |\sin(t)|$, lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ ou lorsque f est continue par morceaux.

1 Une étude de séries.

1.1 Etude de la fonction L.

Pour tout x réel tel que la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left((-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right)$ converge, on note $L(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ sa somme.

Q1) Montrer que la fonction L est définie sur $]-1,1]$ et expliciter $L(x)$ pour $x\in]-1,1[$.

Q2) Montrer, avec soin, que la fonction L est continue sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire que $L(1) = \ln(2)$.

1.2 Etude de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$.

On considère la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ a_{3p} = -\frac{2}{3p}\ ;\ \forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1} = \frac{1}{3p+1}\quad\text{et}\quad a_{3p+2} = \frac{1}{3p+2}$$

Q3) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k} = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}}$$

Q4) déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{3p} a_k$ lorsque $p\to+\infty$ *(on pourra considérer la fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable)*. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} a_k$ et préciser sa somme.

Q5) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$ converge et montrer que sa somme est égale à $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1.3 Etude des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)$.

Pour $t\in]0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\varphi(t) = \dfrac{1}{e^{it}-1}$ et $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$.

On désigne par α un nombre réel fixé dans l'intervalle $]0,2\pi[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera $\pi\leqslant\alpha<2\pi$.

Q6) Montrer que $S_n(t) = \varphi(t)(e^{i(n+1)t} - e^{it})$.

Q7) Montrer que $\varphi \in \mathscr{C}^1([\pi, \alpha])$.

Q8) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\,dt$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ *(on pourra utiliser une intégration par parties).*

Q9) Expliciter $\displaystyle\int_\pi^\alpha S_n(t)\,dt$. Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{e^{ik\alpha}}{k}\right)$.

Expliciter la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\displaystyle\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\,dt$.

Q10) Exprimer $e^{it}\varphi(t)$ en fonction de $\dfrac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ où $t \in [\pi, \alpha]$.

Q11) En déduire la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)$. Expliciter leur somme respective. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu à la question **Q5)** ?

2 Limite d'une intégrale.

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f(t)|\,dt$ soit convergente. On désigne par g une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence) on note $\widetilde{f_g}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(xt)\,dt$ pour $x > 0$.

2.1 Existence de $\widetilde{f_g}(x)$.

On suppose que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Q12) Justifier l'existence de $\widetilde{f_g}(x)$ pour tout $x > 0$. En utilisant la caractérisation séquentielle, montrer que la fonction $\widetilde{f_g}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2.2 Limite de $\widetilde{f_g}(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$.

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles. Soit $\widetilde{f_g}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt$.

Q13) Justifier l'affirmation :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un réel positif } A \text{ tel que } \int_A^{+\infty}|f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$$

Q14) Le nombre réel A étant fixé, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ *(on pourra utiliser une intégration par parties).*

Q15) En déduire la limite de $\widetilde{f_g}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Dans toute la suite, on suppose $g(t) = |\sin(t)|$ et on note simplement

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\,dt$$

2.3 Etude pour une fonction f particulière.

On suppose (dans cet exemple) que f désigne la fonction E définie par $E(t) = e^{-t}$ pour $t \geqslant 0$, et donc $\widetilde{E}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)|\,dt$ pour $x > 0$.

Q16) Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma) = \displaystyle\int_0^\pi e^{\gamma y}\sin(y)\,dy$.

Q17) Montrer que pour $x > 0$,

$$\widetilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u$$

Q18) Exprimer pour $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.

Q19) Justifier, pour $x > 0$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(e^{-\frac{k\pi}{x}})$. Préciser sa somme.

Q20) Expliciter $\widetilde{E}(x)$ pour $x > 0$. Déterminer la limite de $\widetilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2.4 Etude générale.

On désigne de nouveau par f une fonction quelconque continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge et on note

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad x > 0$$

21) Lemme préliminaire.

Pour tout réel t tel que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}\right)$ converge, on pose $h(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$. Montrer que la fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On admet l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}h(t)$$

22) Limite de $\widetilde{f}(x)$ dans le cas $\mathscr{C}^1$.

On suppose de plus que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. En utilisant les résultats obtenus dans la partie **2.2** et la question précédente, déterminer la limite de $\widetilde{f}(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Le résultat est-il conforme à celui obtenu pour la fonction E ?

23) Cas d'une fonction continue par morceaux.

a) Une limite.

Etant donnés deux nombres réels β et δ tels que $0 \leqslant \beta < \delta$, on considère, pour $x > 0$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_\beta^\delta |\sin(xt)|\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F(x) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_{\beta x}^{\delta x}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u$.

On pose p la partie entière de $\dfrac{\beta x}{\pi}$ et q celle de $\dfrac{\delta x}{\pi}$. Pour $x > \dfrac{\pi}{\delta - \beta}$, donner un encadrement de $F(x)$ en fonction de p, q et x.

En déduire que $F(x)$ tend vers $\frac{2}{\pi}(\delta - \beta)$ lorsque $x \to +\infty$.

b) Limite de $\widetilde{f}(x)$ dans le cas d'une fonction continue par morceaux.

Si J est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et si f est une fonction continue par morceaux sur J à valeurs réelles et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_J |f(t)|\,dt$ existe, on note toujours

$$\widetilde{f}(x) = \int_J f(t)|\sin(tx)|\,dt$$

Quelle est la limite de $\widetilde{f}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$:

- lorsque J est un segment et f une fonction en escalier ?
- lorsque J est un segment et f une fonction continue par morceaux ?
- lorsque $J = \mathbb{R}^+$ et f une fonction continue par morceaux ?

Sujet de type Mines

Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

A Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

1) Démontrer que $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrale sur I.

2) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.

3) A l'aide de la caractérisation séquentielle montrer que F est continue sur I.

4) **Question à admettre** Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.

Réponse : $F' : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,\mathrm{d}u$

5) En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$.

6) Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

7) Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

B Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$.

8) Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

9) Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

10) Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

11) Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

12) En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\,\mathrm{e}^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \displaystyle\lim_{x\to 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

13) Quel est l'ensemble I_a si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

14) Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum_{n \geqslant 0} \operatorname{Card}(A(n))\, \mathrm{e}^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Card}(A(n))\, \mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

15) Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor\, \mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, \mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitués des entiers qui sont la sommes des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

16) Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} v(n)\, \mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\, \mathrm{e}^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

D) Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n\, \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x \to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, \mathrm{e}^{-nx} \right) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0,1]$. On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, \mathrm{e}^{-nx}\, \psi(\mathrm{e}^{-nx}).$$

17) Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F. Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E_1, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim_{x \to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x \to 0} x(L(\psi))(x)$$

18) Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \| \ \|_\infty)$.

19) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0,1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tous $a, b \in [0,1]$ tel que $a < b$, on note $1_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1-a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a, 1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

20) Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{\mathrm{e}}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{\mathrm{e}}, 1]. \end{cases}$$

21) Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que $n = p^2 + q^2$.

22) Si $A \in S$, que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card}(A(n))$? Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k)$.