Correction : Devoir surveillé n°4

MP Clemenceau 2023-24

Jeudi 21 décembre 2023

Sujet type CCINP

Notations, définitions et rappels

Pour toute fonction $f \ : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.

I. Quelques exemples de calculs de longueurs

I.1. Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t$.
Correction : Si $f \ : \ t \in \ [0,1] \mapsto$, le graphe de f est le segment d'origine $(0,0)$ et d'extremité $(1,1)$ et sa longueur est $\sqrt{2}$. C'est cohérent avec

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2}$$

I.2. Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$.
Correction : La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivée $t \mapsto \mathrm{sh}(t)$. Sachant que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1$, et $\mathrm{ch}(t) \geqslant 0$:

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(t)}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 |\mathrm{ch}(t)|\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{ch}(t)\, \mathrm{d}t = \mathrm{sh}(1)$$

I.3. Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe.

I.3.1 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1/\sqrt{2}]$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.
Correction : On considère f définie sur $[0, 1/\sqrt{2}]$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a, pour tout $y \in [0, 1/\sqrt{2}]$, $f'(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et donc $1 + (f'(t))^2 = \dfrac{1}{1-t^2}$. Ainsi,

$$L(f) = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t = [\arcsin(t)]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

I.3.2 Retrouver le résultat de la question précédente sans calcul, par des considérations géométriques.
Correction : Comme $t^2 + f(t)^2 = 1$, la courbe de f est un huitième du cercle unité et sa longueur est $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

I.4. Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t^2$. Calculer $L(f)$, en utilisant une intégration par parties ou en s'inspirant de la question **I.2**.
Correction : On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t^2$. On a alors

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} L(f) &= \left[t\sqrt{4t^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{4t^2+1}}\,dt \\ &= \sqrt{5} - L(f) + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} \\ &= \sqrt{5} - L(f) + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned}$$

On peut bien sûr reconnaître la dérivée de argsh *et conclure en ces termes mais cette fonction est maintenant hors programme. Une résolution de* $\operatorname{sh}(t) = x$ *donne une forme logarithmique* $x = \ln(t + \sqrt{1+x^t})$. $u \mapsto \ln(u + \sqrt{u^2+1})$ se dérive en $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ et on a finalement

$$2L(f) = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\left[\ln(u + \sqrt{u^2+1})\right]_0^2$$

ou encore

$$L(f) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

Autre méthode : La question I.2 suggère le changement de variable $t = \dfrac{\operatorname{sh}(u)}{2}$.
La fonction $u \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(u)}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\alpha]$, où α est la solution de $\operatorname{sh}(\alpha) = 2$, à valeurs dans $[0,1]$, et $t \mapsto \sqrt{1+4t^2}$ est continue sur $[0,1]$,
donc $L(f) = \displaystyle\int_0^\alpha \sqrt{1+(\operatorname{sh}(u))^2}\,\frac{\operatorname{ch}(u)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (\operatorname{ch}(u))^2\,\mathrm{d}u$.
Or, pour tout $u \in [0,\alpha]$, $(\operatorname{ch}(\mathrm{u}))^2 = \dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{u}} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{u}} + 2}{4} = \dfrac{\operatorname{ch}(2\mathrm{u}) + 1}{2}$,
donc $L(f) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^u (1 + \operatorname{ch}(2u))\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}(2\alpha + \operatorname{sh}(2\alpha))$.
On cherche alors α et on trouve $\alpha = \ln(2+\sqrt{5})$. En utilisant la forme exponentielle de sh on trouve $L(f) = \dfrac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})\right)$.

II. Un calcul approché de longueur

L'objectif de cette partie est d'effectuer un calcul approché de la longueur d'un arc d'hyperbole. On considère, pour ce faire, la fonction f définie sur $[1/2, 1]$ par $f(t) = 1/t$.

II.1. Expression intégrale de $L(f)$

II.1.1 Donner une expression intégrale de $L(f)$.

Correction : On a $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et donc $1 + (f'(t))^2 = \dfrac{t^4+1}{t^4}$. Ainsi

$$L(f) = \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{t^4+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

II.1.2 Montrer que $L(f)$ est aussi la longueur de l'arc d'hyperbole correspondant à la restriction de f à l'intervalle $[1,2]$.

Correction : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[1/2,1]$. On considère le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ qui donne

$$L(f) = -\int_2^1 \sqrt{1 + \frac{1}{u^4}}\,du = \int_1^2 \sqrt{1+(f'(u))^2}\,\mathrm{d}u$$

qui correspond à la longueur du graphe de f sur $[1,2]$.

II.2. **Expression de $L(f)$ sous forme de série numérique**

II.2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$, en précisant son domaine de validité.

Correction : Le développement en série entière est

$$\forall u \in]-1,1[,\ (1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) u^n$$

II.2.2 Montrer que, pour tout $t \in]0,1[$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n-2}$$

Correction : Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ on a, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1-2k}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n-1} (1-2k) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (2k-1)(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (2k)} = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^n n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)2^{2n} n!}
\end{aligned}$$

On en déduit alors que, pour $u \in]-1,1[$

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} u^n$$

Pour $t \in]0,1[$, on a t^4 dans $]-1,1[$ donc

$$\sqrt{1+t^4} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n}$$

et par suite

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n-2}$$

II.2.3 On note, pour tout entier n, $a_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et donner un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}$. Les termes de cette suite sont non nuls, on peut donc faire le rapport :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!(2n-1)2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)2^{2n+2}((n+1)!)^2(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{(2n+1)4(n+1)^2} \\
&= \frac{2n-1}{2(n+1)} = \frac{2n-1}{2n+2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ et donc que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Pour déterminer un équivalent de la suite on va utiliser la formule de Stirling.

$$\begin{aligned}
a_n &\sim \frac{\sqrt{4n\pi}(2n)^{2n}\,\mathrm{e}^{-2n}}{(2n-1)2^{2n}\left(\sqrt{2\pi n}\, n^n\, \mathrm{e}^{-n}\right)^2} \sim \frac{2\sqrt{\pi n}}{(2n-1)2\pi n} \\
a_n &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

II.2.4 En déduire une expression de $L(f)$ comme somme d'une série numérique (on vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé).

Correction : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : t \mapsto (-1)^{n-1}\dfrac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}t^{4n-2}$. Cette fonction est définie et continue sur le segment $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

De plus on a $\|g_n\|_{[1/2,1],\infty} = a_n$. D'après la question précédente $a_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$. Or la série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente, donc la série $\sum a_n$ est convergente. On en déduit que la série $\sum g_n$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

On peut donc inverser série intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}t^{4n-2}\,dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{4n-2}\,dt\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2(4n-1)}\left(1-\frac{1}{2^{4n-1}}\right)\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}L(f) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}t^{4n-2}\,dt\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^2}\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}t^{4n-2}\,dt\\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2(4n-1)}\left(1-\frac{1}{2^{4n-1}}\right)\end{aligned}$$

II.2.5 Donner une valeur approchée de $L(f)$ en utilisant les 5 premiers termes de la série obtenue à la question précédente et donner une majoration de l'erreur commise.

Correction : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0. Pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $t^{4n+2} \leqslant t^{4n-2}$, d'où $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{4n+2}\,dt \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{4n-2}\,dt$. On en déduit que la suite $\displaystyle\left(a_n\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{4n+2}\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0.

La série $\displaystyle\sum(-1)^{n-1}a_n\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{4n+2}\,dt$ est alors une série alternée qui vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées.

On peut donc majorer le reste de la série par son premier terme :

$$\left|L(f)-1-\sum_{n=1}^{5}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2(4n-1)}\left(1-\frac{1}{2^{4n-1}}\right)\right| \leqslant \frac{(12)!}{(11)2^{12}(6!)^2(23)}\left(1-\frac{1}{2^{23}}\right)$$

III. Longueur du graphe des fonctions puissances

On s'intéresse ici, pour tout entier $n \geq 1$, aux fonctions puissances p_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0,1],\ p_n(t) = t^n$$

On désigne par $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n = L(p_n) = \int_0^1 \sqrt{1+n^2t^{2n-2}}\,dt$$

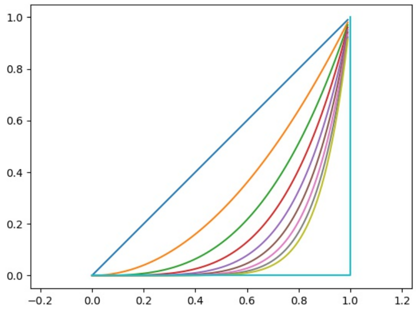
III.1. Conjecture sur la limite éventuelle de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

III.1.1 Déterminer λ_1 et λ_2.

Correction : il suffit de reprendre la première question du problème.

III.1.2 En traçant, sur un même graphe, les courbes représentatives de quelques fonctions p_n avec n de plus en plus grand, conjecturer la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite éventuelle.

Correction : Voici les courbes pour $n \in [\![1, 10]\!]$.



On peut conjecturer que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par la longueur de la ligne brisée $((0,0),(1,0),(1,1)$ et converge vers sa longueur qui est 2.

III.2. Convergence et limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

III.2.1 Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}\,dt = \mu_n \quad \text{où} \quad \mu_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}\,dt$$

Correction : Pour tout $n \geqslant 1$, $\lambda_n - \displaystyle\int_0^1 nt^{n-1}dt = \int_0^1 \left(\sqrt{1+n^2t^{2n-2}} - nt^{n-1}\right)dt$.

Pour tout $t \in [0,1]$, $\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}$ est supérieur ou égal à 1, donc non nul, donc, en multipliant le numérateur et le dénominateur de l'intégrande par $\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}$, on obtient :

$\lambda_n - \displaystyle\int_0^1 nt^{n-1}dt = \int_0^1 \frac{1+n^2t^{2n-2}-n^2t^{2n-2}}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}dt,$

donc $\lambda_n - \displaystyle\int_0^1 nt^{n-1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}\,dt$

III.2.2 Montrer que $\lambda_n < 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}$. Cette fonction est positive et continue sur $[0,1]$ on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}\,dt \leqslant 1$. De plus si cette intégrale est égale à 1 alors $\displaystyle\int_0^1 f_n = 0$ et donc pour tout $t \in [0,1]$ $f_n(t) = 0$, ce qui est absurde donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}\,dt < 1$.

Comme $\displaystyle\int_0^1 nt^{n-1}\,dt = 1$ on en déduit que $\lambda < 2$.

III.2.3 Déterminer la limite de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

Correction : Utilisons le théorème de convergence dominée pour étudier (μ_n).

- $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}$ est continue sur $[0,1]$ et (f_n) converge simplement vers $t \mapsto 1$ sur $[0,1[$ (car $\forall t \in [0,1[,\ nt^{n-1} \to 0$ quand $n \to +\infty$).
- La limite simple $t \mapsto 1$ est continue sur $[0,1[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1[,\ |f_n(t)| \leq 1$ et le majorant est intégrable sur $[0,1[$ (continu sur le segment).

Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \int_0^1 dt = 1$$

III.2.4 En déduire la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite.

Correction : Par définition de μ_n et λ_n on a immédiatement $\lambda_n \to 2$

III.3. Plus généralement, montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a alors $L(f) < 2$.

Correction : En écrivant que $f'(t) = \sqrt{(f'(t)^2}$ (fonction croissante et donc à dérivée positive) on a de même

$$L(f) - \int_0^1 f'(t) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+f'(t)} \leq 1$$

Or, $\int_0^1 f'(t) = f(1) - f(0) = 1$ et donc

$$L(f) \leq 2$$

S'il y avait égalité, on aurait l'intégrale de $1 - \frac{1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}+f'(t)} = g(t)$ qui serait nulle sur $[0,1]$ et comme g est positive et continue, cela signifierait que g est nulle c'est à dire que f' est nulle ou encore que f est constante ce qui n'est pas le cas ($f(0) \neq f(1)$). On a donc

$$L(f) < 2$$

IV. Un résultat inattendu

IV.1. Etude de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\, dt$

IV.1.1 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

Correction : La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 ($\lim \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$). L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}$ dest donc convergente.

IV.1.2 Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

Correction :

— Soit $x > 1$. Les fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,x]$, de dérivées respectives $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{t^2}$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :
pour tout $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ donc

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

— La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$, et, pour tout $t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant \left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ l'est également, donc $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$ admet une limite finie en $+\infty$.
Enfin, $\dfrac{\cos(x)}{x}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$, donc $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.
Finalement : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente

IV.1.3 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\, dt$ est convergente.

Correction : On a, pour $x > 1$, à l'aide d'une intégration par parties

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t}\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(2x)}{x} - \sin(2)\right) + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}\, dt$$

$t \mapsto \frac{\sin(2t)}{t^2} = O(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc (comparaison à Riemann) une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$. Comme à la question précédente, on a l'existence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\, dt = -\frac{\sin(2)}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}\, dt$$

IV.1.4 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\, dt$ est divergente. En déduire la divergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$.

Correction : On a $\frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$ et donc

$$\int_x^1 \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt = \frac{\ln(x)}{2} - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,dx$$

et cette quantité tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$. Ainsi, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt$ est divergente.
Comme $\frac{\sin^2(t)}{t} \geq 0$, ceci revient à dire que $t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$. Or, $|\sin| \geq \sin^2 \geq 0$ et donc $t \mapsto \frac{|\sin(t)|}{t}$ n'est pas intégrable non plus sur $[1,+\infty[$. Et comme cette fonction est positive, ceci revient à dire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$ diverge.

IV.2. On désigne par g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \int_x^1 g(t)\,dt$.

IV.2.1 Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.
Correction : $t \mapsto 1/t$ est de classe C^1 sur $[x,1]$ pour $x > 0$. On peut donc poser le changement de variable $u = 1/t$. Il indique que

$$f(x) = \int_x^1 \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,dt = \int_1^{1/x} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

Avec les questions précédente, f est prolongeable par continuité en 0 en posant

$$f(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

IV.2.2 Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0,1]$.
Correction : g est continue sur $]0,1]$, $]0,1]$ est un intervalle qui contient 1. Par théorème fondamental, $-f\ :\ x \mapsto \int_1^x g(t)\,dt$ est une primitive de g sur $]0,1]$. Comme g est de classe C^∞ sur $]0,1]$, $-f$, et donc f, l'est aussi. On a vu (ou imposé par choix de $f(0)$) la continuité en 0.

IV.2.3 Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\,dt = +\infty$$

Correction : Le même calcul que plus haut donne

$$\int_x^1 |g(t)|\,dt = \int_1^{1/x} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du$$

On a vu que l'intégrale de $u \mapsto \frac{|\sin(u)|}{u}$ n'existe pas sur $[1,+\infty[$. Comme cette fonction est positive, son intégrale entre 1 et a tend vers $+\infty$ quand $a \to +\infty$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\,dt = +\infty$$

IV.3. Pour tout réel $x \in]0,1]$, on désigne par $\lambda(x)$ la longueur de la courbe représentative de la restriction de la fonction f au segment $[x,1]$. Donner une expression intégrale de $\lambda(x)$ pour $x \in]0,1]$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.
Correction : Pour $t \in]0,1]$, on a $f'(t) = -g(t)$ et donc $1 + (f'(t))^2 = 1 + \frac{1}{t^2}\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)$. Ainsi

$$\forall x \in]0,1],\ \lambda(x) = \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}\sin^2\left(\frac{1}{t}\right)}\,dt$$

On en déduit que

$$\forall x \in]0,1],\ \lambda(x) \geq \int_x^1 |g(t)|\,dt$$

et par comparaison

$$\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$$

Ceci signifie que la courbe représentative de la fonction f continue sur le segment est $[0,1]$ est infinie.

V. Continuité de la fonction longueur

On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note $E_1 = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

V.1. Comparaison des normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$

V.1.1 Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1.

Correction : L'application est positive. Son homogénéité découle de celle de $\|.\|_\infty$ et de celle du module (on a $\|\lambda f\| = |\lambda|.\|f\|$). L'inégalité triangulaire découle de la même propriété pour $\|.\|_\infty$. Enfin, si $\|f\| = 0$ alors $f(0) = \|f'\|_\infty = 0$. f' est donc nulle et f est constante. Comme $f(0) = 0$, f est nulle. On a donc aussi l'axiome de séparation et $\|.\|$ est une norme sur E_1.

V.1.2 Montrer que

$$\forall f \in E_1,\ \|f\|_\infty \leq \|f\|$$

Correction : Soit $f \in E_1$. On a

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| = \left| f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt \right| \leq |f(0)| + \int_x^1 |f'(t)|\ dt \leq |f(0)| + (1-x)\|f'\|_\infty \leq \|f\|$$

On en déduit que

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|$$

V.1.3 Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?

Correction : Prenons les fonctions $p_n\ :\ t \mapsto t^n$ de la partie **III** (elles sont dans E_1). On a $\|p_n\|_\infty = 1$ et $\|p_n\| = n$. Le quotient $\|p_n\|/\|p_n\|_\infty$ n'étant pas borné, les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E_1.

V.2. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$

V.2.1 Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Correction : On a immédiatement $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. (f_n) est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

V.2.2 On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geq \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$

Correction : La définition donne

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{1 + n\pi^2\cos^2(n\pi t)}\ dt$$

Le changement de variable $u = n\pi t$ donne alors

$$I_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sqrt{1 + n\pi^2\cos^2(u)}\ du$$

On a alors immédiatement

$$I_n \geq \frac{1}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sqrt{n\pi^2\cos^2(u)}\ du = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{n\pi} |\cos(u)|\ du$$

$|\cos|$ étant π périodique, on a finalement

$$I_n \geq \sqrt{n}\int_0^{\pi} |\cos(u)|\ du = 2\sqrt{n}$$

Comme $\pi \leq 4$ on peut aussi écrire que

$$I_n \geq \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$

V.2.3 L'application $L\ :\ f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|_\infty)$?

Correction : Comme $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, la continuité de L au sens de $\|.\|_\infty$ entraînerait $L(f_n) \to L(0) = 0$. Comme on a $L(f_n)$ qui est de limite infinie quand $n \to +\infty$ on peut conclure que L n'est pas continue au sens de $\|.\|_\infty$.

V.2.4 L'application $L\ :\ f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|)$?

Correction : Soient $f, g \in E_1$. On a

$$\begin{aligned}
|L(f) - L(g)| &= \left|\int_0^1 (\sqrt{1+(f')^2} - \sqrt{1+(g')^2})\right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{|(f')^2 - (g')^2|}{\sqrt{1+(f')^2} + \sqrt{1+(g')^2}} \\
&\leq \int_0^1 |f' - g'|.|f' + g'| \\
&\leq \|f' - g'\|_\infty \|f' + g'\|_\infty \\
&\leq \|f - g\| \|f + g\| \\
&\leq \|f - g\| (\|f\| + \|g\|)
\end{aligned}$$

Soit (f_n) une suite d'éléments de E_1 qui converge vers f au sens de $\|.\|$. On a donc $\|f_n - f\| \to 0$. Par seconde forme de l'inégalité triangulaires, on en déduit que $\|f_n\| \to \|f\|$. L'inégalité

$$|L(f_n) - L(f)| \leq (\|f\| + \|f_n\|)\|f_n - f\|$$

montre alors que $L(f_n) \to L(f)$. L est continue au sens de $\|.\|$.

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$, et $\mathscr{L}_c(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même.

Soit v un élément de $\mathscr{L}_c(E)$, et f un élément de E ; l'image de f par v est notée vf. L'espace $\mathscr{L}_c(E)$ est muni de la norme $v \mapsto |||v||| = \sup\limits_{\|f\|\leq 1} \|vf\|$(on ne demande pas de vérifier que c'est une norme).

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, on met en place dans les deux premières parties des outils nécessaires à cette étude.

Rappels

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par la formule suivante :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et, pour tout entier naturel k et tout nombre réel $x > 0$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

De plus, pour tout $x > 0$, cette fonction vérifie l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Comme $\Gamma(1) = 1$, il en découle que, pour tout entier naturel n,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Partie I : Questions préliminaires

1) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

Correction : $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Comme Γ est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

2) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

Correction : Pour $x > 0$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1}\; dt$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle, donc $\Gamma''(x) > 0$. Donc Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On en déduit que Γ' est strictement positive sur $]c,+\infty[$ et Γ strictement croissante sur cet intervalle ; *a fortiori* sur $[2,+\infty[$.

3) Montrer que, pour tout nombre réel $\gamma > 0$,

$$\gamma^x = \circ(\Gamma(x)) \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

Correction : Comme $(\Gamma(n))_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ et que Γ est croissante au voisinage de $+\infty$, Γ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On peut donc limiter l'étude à $\gamma > 1$.
Pour $x \geq 2$, on note n sa partie entière.
On a alors : $0 \leq \dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \leq \dfrac{\gamma^{n+1}}{\Gamma(n)} = \gamma^2 \dfrac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}$. Comme la partie entière tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et que la suite $\left(\dfrac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0, $\dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ie $\gamma^x = o(\Gamma(x))$ au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A - Soit ϕ une application continue de l'intervalle $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $t_0 \geq 0$ tel que la fonction ϕ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.

4) Établir que la fonction ϕ est positive sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.
(on pourra raisonner par l'absurde).

Correction : On suppose que ϕ n'est pas positive sur $[t_0, +\infty[$. Soit alors $t_1 \geq t_0$ tel que $\phi(t_1) < 0$; par décroissance de ϕ, sur $[t_1, +\infty[$, $\phi(t) \leq \phi(t_1) \leq 0$. Or la fonction constante $t \mapsto \phi(t_1)$ n'est pas intégrable sur l'intervalle non borné $[t_1, +\infty[$; donc ϕ n'est pas intégrable sur cet intervalle. Absurde.
Donc ϕ est positive sur $[t_0, +\infty[$.

5) Soit h un réel strictement positif.

a) Prouver que pour n suffisamment grand, $0 \leq h\phi(nh) \leq \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction : Pour $n \geq (t_0/h) + 1$: on a $[(n-1)h, nh] \subset [t_0, +\infty[$, ϕ est donc décroissante et positive sur cet intervalle et donc, pour tout $t \in [(n-1)h, nh]$ $\phi(t) \geq \phi(nh)$.
Donc $\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(nh)\,\mathrm{d}t = h\phi(nh) \geq 0$.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ converge.

Correction : La série $\sum h\phi(nh)$ est une série à termes positifs à partir d'un certain rang. La suite des sommes partielles est donc croissante à partir d'un certain rang.
D'après la question précédente on a, pour $N \geqslant n_0 \geqslant (t_0/h) + 1$

$$\sum_{n=0}^{N} h\phi(nh) \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} h\phi(nh) + \sum_{n=n_0+1}^{N} h\phi(nh) \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} h\phi(nh) + \sum_{n=n_0+1}^{N} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,\mathrm{d}t$$

Or la fonction ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et par conséquent sur $[n_0h, +\infty[$. Par positivité de ϕ sur ce dernier intervalle (inclus dans $[t_0, +\infty[$), on obtient alors

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n_0h}^{Nh} \phi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0h}^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum h\phi(nh)$ est donc croissante à partir d'un certain rang et majorée, elle est donc convergente.
Remarque : en fait, si on accepte le théorème de comparaison de séries intégrales avec les hypothèses de décroissance et positivité de la fonction à partir d'un certain rang alors on retrouve le résultat.

6) Prouver que

$$\lim_{h \to 0, h>0} h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t$$

(On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{a}{h}\right]} h\phi(nh) + \sum_{n=\left[\frac{a}{h}\right]+1}^{+\infty} h\phi(nh)$$

où $\left[\dfrac{a}{h}\right]$ désigne la partie entière de $\dfrac{a}{h}$.)

Correction : Pour $n \geq (t_0/h) + 1$, pour la même raison qu'au (II.A.2.a) :
$h\phi(nh) \leq \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,\mathrm{d}t \leq h\phi((n-1)h)$.
On note n_0 la partie entière de $(t_0/h) + 2$.
On a alors : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi(nh) \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi((n-1)h) = \sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh)$,
donc $0 \leq \displaystyle\sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t \leq h\phi((n_0-1)h)$.

De plus, $\left|\displaystyle\int_0^{(n_0-1)h}\phi(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{n_0-2}h\phi(nh)\right|=\left|\sum_{n=0}^{n_0-2}\int_{nh}^{(n+1)h}(\phi(t)-\phi(nh))\,\mathrm{d}t\right|\le\sum_{n=0}^{n_0-2}\int_{nh}^{(n+1)h}|\phi(t)-\phi(nh)|\,\mathrm{d}t$

Comme $\forall t\in[nh,(n+1)h],\ |t-nh|\le h$:

$$\left|\int_0^{(n_0-1)h}\phi(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{n_0-2}h\phi(nh)\right|\le(n_0-1)h.\sup\{|\phi(t)-\phi(u)|\,,t,u\in[0,(n_0-1)h],|t-u|\le h\}$$

Or $(n_0-1)h\le t_0+h$. On se limite à $h\in]0,1]$; ainsi $(n_0-1)h\le t_0+1$. Comme ϕ est continue sur le segment $[0,t_0+1]$, elle y est uniformément continue.
Soit $\epsilon>0$; on peut trouver $h_0\in]0,1]$ tel que $\forall t,u\in[0,t_0+1],|t-u|\le h_0\Longrightarrow|\phi(t)-\phi(u)|\le\epsilon$.
Alors, pour $h\in]0,h_0]$, on a : $\left|\displaystyle\int_0^{(n_0-1)h}\phi(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{n_0-2}h\phi(nh)\right|\le(t_0+1)\epsilon.$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{+\infty}h\phi(nh)=\left(\int_0^{(n_0-1)h}\phi(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{n_0-2}h\phi(nh)\right)+\left(\int_{n_0-1}^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=n_0}^{+\infty}h\phi(nh)\right)$,
on en déduit :

$$\left|\int_0^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{+\infty}h\phi(nh)\right|\le(t_0+1)\epsilon+h\phi((n_0-1)h)$$

Comme ϕ est continue sur le segment $[0,t_0+1]$, elle y est bornée.
Or $(n_0-1)h\in[0,t_0+1]$; donc $h\phi((n_0-1)h)\xrightarrow[h\to0^+]{}0$.
On peut donc trouver $h_1>0$ tel que $\forall h\in]0,h_1],\ |h\phi((n_0-1)h)|\le\epsilon$.
Finalement, pour tout $h\in]0,\min(h_0,h_1)]$, on a :

$$\left|\int_0^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{+\infty}h\phi(nh)\right|\le((t_0+2)\epsilon.$$

Comme t_0 est une donnée, on peut conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{+\infty}h\phi(nh)\xrightarrow[h\to0,h>0]{}0.$

II.B - Pour tout nombre réel $\alpha\ge1$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par la formule $g_\alpha(t)=\mathrm{e}^{-t}\,t^{\alpha-1}$.

7) Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A.
En déduire que

$$\lim_{x\to1,x<1}(-\ln x)\sum_{n=0}^{+\infty}g_\alpha(-n\ln x)=\Gamma(\alpha)$$

Correction : Pour $\alpha<1$, la fonction g_α ne peut être prolongée en une fonction continue sur $[0,+\infty[$.
Pour la suite, on suppose $\alpha\ge1$. Alors g_α est continue sur $[0,+\infty[$ (après prolongement naturel en 0) et intégrable sur $[0,+\infty[$ (d'intégrale $\Gamma(\alpha)$) car au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}^{-t}\,t^{\alpha-1}=o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'_\alpha(t)=e^{-t}t^{\alpha-2}(-t+\alpha-1)$. Donc g'_α est négative sur $[\alpha-1,+\infty[$ et g_α est décroissante sur cet intervalle. Les hypothèses du (II.A) sont donc satisfaites par $g_\alpha,\ \alpha\ge1$.

Pour $x\in]0,1[$, $h=-\ln x>0$ et $h\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}g_\alpha(nh)=(-\ln x)\sum_{n=0}^{+\infty}g_\alpha(-n\ln x))$; comme $h\xrightarrow[x\to1,x<1]{}0$ avec $h>0$,

d'après (II.A), $(-\ln x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}g_\alpha(-n\ln x))\xrightarrow[x\to1,x<1]{}\int_0^{+\infty}g_\alpha=\Gamma(\alpha)$.

8) On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha-1}x^n$.

a) Établir que cette série est correctement définie pour $x\in\,]-1,1[$. On note S_α la somme de cette série de fonctions.

Correction : On étudie la convergence absolue de la série $\sum n^{\alpha-1}x^n$ pour $x\neq0$:

$\dfrac{\left|(n+1)^{\alpha-1}x^{n+1}\right|}{|n^{\alpha-1}x^n|} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha-1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$; d'après la règle de d'Alembert, comme $\left|n^{\alpha-1}x^n\right| > 0$ pour tout $n \geq 1$, si $|x| < 1$, la série $\sum \left|n^{\alpha-1}x^n\right|$ converge, si $|x| > 1$, elle diverge.

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{\alpha-1}x^n$ vaut 1.

b) Prouver que, lorsque x tend vers 1 avec $x < 1$, alors :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$$

Correction : Pour $x \in]0,1[$, $g_\alpha(-n\ln x) = (-\ln x)^{\alpha-1}n^{\alpha-1}x^n = (-\ln x)^{\alpha-1}S_\alpha(x)$.

Pour $\alpha \geq 1$:

$-\ln x\, g_\alpha(-n\ln x) = (-\ln x)^\alpha S_\alpha(x) \xrightarrow[x\to1,x<1]{} \Gamma(\alpha) \neq 0$; donc $S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(-\ln x)^\alpha}$ au voisinage de 1^-. Comme $\ln x \sim x-1$ au voisinage de 1 : $S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$ au voisinage de 1^-.

Partie III : La première fonction eulérienne

III.A -

9) Établir que, pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

Correction : La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0,1[$. Équivalente en 0^+ à $t^{\alpha-1}$, elle est intégrable sur $]0,1/2]$ si et seulement si $\alpha-1 > -1$, c'est à dire $\alpha > 0$. Équivalente en 1^- à $(1-t)^{\beta-1}$, elle est intégrable sur $[1/2,1[$ si et seulement si $\beta-1 > -1$, c'est à dire $\beta > 0$. Elle est donc intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si α et β sont strictement positifs.

Pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$$

10) Prouver successivement pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs les relations suivantes :

(i) $\quad B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$

(ii) $\quad B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}t$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{1-t}$.)

(iii) $\quad B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$

Correction :

i) L' égalité est obtenue avec le changement de variable affine $t \mapsto u = 1-t$, qui est un difféomorphisme (application bijective de classe $\mathscr{C}^1$ et de réciproque de classe $\mathscr{C}^1$) de $]0,1[$ sur lui-même.

ii) $u = \dfrac{t}{1-t} \iff t = \dfrac{u}{u+1}$; $u \mapsto t = \dfrac{u}{1+u}$ est un difféomorphisme de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$, de dérivée $u \mapsto= \dfrac{1}{(1+u)^2}$; $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} = \left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha+\beta-2} = u^{\alpha-1}\dfrac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}$.

Donc $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}\frac{1}{(1+u)^2}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}\, du.$

iii) Soit $\epsilon \in]0,1/2]$; on fait une intégration par parties sur un segment,

$\displaystyle\int_\epsilon^{1-\epsilon} t^\alpha(1-t)^{\beta-1}\, dt = \left[t^\alpha\frac{-(1-t)^\beta}{\beta}\right]_\epsilon^{1-\epsilon} + \frac{\alpha}{\beta}\int_\epsilon^{1-\epsilon} t^{\alpha-1}(1-t)^\beta\, dt.$

Comme α et β sont strictement positifs, $t^\alpha\dfrac{-(1-t)^\beta}{\beta}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ou 1 ;

donc $\left[t^\alpha\dfrac{-(1-t)^\beta}{\beta}\right]_\epsilon^{1-\epsilon} \xrightarrow[\epsilon\to0]{} 0.$

De plus, $t^{\alpha-1}(1-t)^\beta = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1-t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} - t^\alpha(1-t)^{\beta-1}$;

donc $\displaystyle\int_\epsilon^{1-\epsilon} t^{\alpha-1}(1-t)^\beta\, dt \xrightarrow[\epsilon\to0]{} B(\alpha,\beta) - B(\alpha+1,\beta).$

On en déduit : $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\beta}(B(\alpha,\beta)-B(\alpha+1,\beta))$; puis : $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

Reamrque : on peut aussi faire une intégration par parties à partir de la formule ii), en la justifiant correctement, à partir de $B(\alpha+1,\beta)$.

III.B - On se propose d'établir pour tout réel $\alpha>0$ et tout réel $\beta>0$ la formule suivante :

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

11) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels α et β sont strictement supérieurs à 2.

Correction : On suppose que pour tout $\alpha,\beta>2,\ B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Soit $\alpha,\beta>0$; à l'aide de la formule IIA2iii) on a

$$\begin{aligned}B(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\alpha+2,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\beta,\alpha+2)\\ &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}B(\beta+1,\alpha+2)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}\frac{\alpha+\beta+3}{\beta+1}B(\beta+2,\alpha+2).\end{aligned}$$

Comme $\alpha+2$ et $\beta+2$ sont strictement supérieurs à 2 :
$B(\beta+2,\alpha+2)=\dfrac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)}=\dfrac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)(\beta+1)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$.
Après substitution et simplification, en utilisant les propriétés de la fonction Γ rappelées :
$B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Il suffit donc bien d'avoir le résultat pour $\alpha+2$ et $\beta+2$ sont strictement supérieurs à 2.

12) Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$u_n(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a) Établir que la fonction $\psi_{\alpha,\beta}:t\mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitzienne sur le segment $[0,1]$.

Correction : Comme $\alpha-1$ et $\beta-1$ sont strictement plus grands que 1, $\psi_{\alpha,\beta}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, donc sa dérivée est bornée. Donc $\psi_{\alpha,\beta}$ est lipschitzienne.

On note $A_{\alpha,\beta}$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire que :

$$\forall(x,y)\in[0,1]^2\quad,\quad|\psi_{\alpha,\beta}(x)-\psi_{\alpha,\beta}(y)|\le A_{\alpha,\beta}\,|x-y|$$

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif :

$$|u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)|\le\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}$$

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; $B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\ dt$.

Comme, sur $[k/n,(k+1)/n]$, $\left|\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\dfrac{k}{n})\right|\le A_{\alpha,\beta}\left|t-\dfrac{k}{n}\right|=A_{\alpha,\beta}(t-\dfrac{k}{n})$, on a :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\ dt\right|\le\int_{k/n}^{(k+1)/n}A_{\alpha,\beta}(t-\frac{k}{n})\ dt=A_{\alpha,\beta}.\frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit : $|B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)|\le\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\ dt\right|\le n.\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n^2}=\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}$.

c) On reprend les notations de la question II.B.2.
Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$:

$$S_\alpha(x)S_\beta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n$$

Déduire de la question 2.b) que, pour tout réel x, $0 \leq x < 1$,

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \frac{A_{\alpha,\beta}}{2} S_{\alpha+\beta-1}(x)$$

En utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma\geq 1}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

Correction : Pour $x \in [0,1[$, les séries $\sum n^{\alpha-1}x^n$ et $\sum n^{\beta-1}x^n$ convergent absolument (séries entières de rayon de convergence 1), donc la série produit converge absolument et sa somme est le produit des sommes, soit $S_\alpha(x)S_\beta(x)$.
Le terme d'ordre n de la série produit vaut :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}x^n = n^{\alpha+\beta-2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1} x^n = n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n$.
On en déduit que : $S_\alpha(x)S_\beta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n$.

Par différence : $S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}\left(u_n(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)\right)x^n$.
Avec la majoration du (2.b), on obtient :
$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}\left|u_n(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)\right|x^n \leq \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-2}x^n = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)$.

En multipliant par $(1-x)^{\alpha+\beta}$:
$\left|(1-x)^\alpha S_\alpha(x).(1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha,\beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x)\right| \leq \dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x)$.
Comme α, β, $\alpha+\beta$ et $\alpha+\beta-1$ sont tous supérieurs à 1, on peut utiliser la question (II.B.2) :
$(1-x)^\alpha S_\alpha(x).(1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha,\beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$
et $\dfrac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} 0$;
donc $|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)| \leq 0$, c'est à dire $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = 0$.

III.C - Formule des compléments.

13) Établir que la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$.

Correction : D'après la question **B** on a $B(\alpha,1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$. La fonction $\alpha \mapsto B(\alpha,1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$ comme composée de fonctions continues.

14) Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

a) Vérifier que :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1-\frac{2p+1}{2q}\right) = 2q\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t$$

Correction : On a $(2p+1)/(2q) \in]0,1[$.
D'après le (III.A.2.ii), $B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{(2(p-q)+1)/2q)}}{1+t}\,dt$.
Le changement de variable $u \mapsto t = u^{2q}$, difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même, permet d'obtenir :
$B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^{2(p-q)+1}}{1+u^{2q}}.2qu^{2q-1}\,du = 2q\int_0^{+\infty}\frac{u^{2p}}{1+u^{2q}}\,du$.
b) Pour tout entier k compris entre 0 et $q-1$, on note :

$$z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}$$

Établir que :

$$(*) \qquad \frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k}\right)$$

Correction : Les z_k, k compris entre 0 et $q-1$ et leurs opposés sont les $2q$ zéros de $X^{2q}+1$ (et ils sont simples).

Comme $A = X^{2p}$ a un degré strictement inférieur à $B = X^{2q}+1$, la partie entière de $\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ est nulle. Le développement en éléments simples de $\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ s'écrit donc : $\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{a_k}{X-z_k}+\frac{b_k}{X+z_k}\right)$, où les a_k et les b_k sont des nombres complexes définis par : $a_k = \dfrac{A(z_k)}{B'(z_k)}$ et $b_k = \dfrac{A(-z_k)}{B'(-z_k)}$.

Or $B' = 2qX^{2q-1}$ et $z_k^{2q} = -1$; donc $B'(z_k) = -\dfrac{2q}{z_k}$ et $B'(-z_k) = \dfrac{2q}{z_k}$; d'où la formule de l'énoncé.

c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left((t-Re(c))^2+(Im(c))^2\right) + i\arctan\left(\dfrac{t-Re(c)}{Im(c)}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-c}$, prouver, en utilisant judicieusement la relation $(*)$, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$$

En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}$$

Correction : Vérification par simple dérivation ...

Pour tout k compris entre 0 et $q-1$, la fonction :

$$\begin{aligned}\omega_k : t \mapsto \quad & \left(\frac{1}{2}\ln\left((t-\Re z_k)^2+(\Im z_k)^2\right) + i\arctan\left(\frac{t-\Re z_k}{\Im z_k}\right)\right) \\ & \qquad - \left(\frac{1}{2}\ln\left((t+\Re z_k)^2+(-\Im z_k)^2\right) + i\arctan\left(\frac{t+\Re z_k}{-\Im z_k}\right)\right) \\ = & \tfrac{1}{2}\ln\frac{(t-\Re z_k)^2+(\Im z_k)^2}{(t+\Re z_k)^2+(\Im z_k)^2} + i\left(\arctan\left(\frac{t-\Re z_k}{\Im z_k}\right)+\arctan\left(\frac{t+\Re z_k}{\Im z_k}\right)\right)\end{aligned}$$

est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-z_k} - \dfrac{1}{t+z_k}$.

Comme $\operatorname{Im} z_k = \sin\pi\dfrac{2k+1}{2q} > 0$, $\omega_k(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi i$; et $\omega_k(0) = 0$.

La fonction $\omega = -\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\,\omega_k$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^{2p}}{1+t^{2q}}$.

De plus, $\omega(0) = 0$ et $\omega(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\pi = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

On en déduit que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\ dt = \lim_{+\infty}\omega - \omega(0) = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

Or $z_k^{2p+1} = e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}.\left(e^{i\pi\frac{2p+1}{q}}\right)^k$ et $e^{i\pi\frac{2p+1}{q}} \neq 1$;

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}.\frac{e^{i\pi\frac{2p+1}{q}\,q}-1}{e^{i\pi\frac{2p+1}{q}}-1} = e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}.\frac{e^{i\pi(2p+1)}-1}{e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}\left(e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}-e^{-i\pi\frac{2p+1}{2q}}\right)} = \frac{-2}{2i\sin\pi\frac{2p+1}{2q}}$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\ dt = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\pi\frac{2p+1}{2q}}$.

15) Déduire de **13)** et **14)** que :

$$\forall \alpha \in]0,1[\quad , \quad B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

Correction : Pour tout α de la forme $\alpha = \dfrac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, on a ainsi :
$B(\alpha, 1-\alpha) = 2q \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} \; dt = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.
Comme $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ et $\alpha \mapsto \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ sont continues sur $]0, 1[$ et que l'ensemble des $\dfrac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, est dense dans $]0, 1[$, on peut affirmer : $\forall \alpha \in]0, 1[$, $B(\alpha, 1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.
De plus, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha)\Gamma(\alpha + (1-\alpha)) = B(\alpha, 1-\alpha)$.

Partie IV : L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

IV.A -

16) Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1]$, la fonction $f \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, x[$.

Correction : La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $[0, x[$ et, pour tout $t \in [0, x[$,
on a $\left|\dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\right| \leq \dfrac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$; comme $t \mapsto \dfrac{1}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0, x[$ (de référence, avec $\alpha < 1$), $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0, x[$, donc sur $]0, x[$.

17) Pour tout élément f de E, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0, 1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } x = 0$$

$$A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt \quad \text{si } 0 < x \leq 1$$

a) Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0, 1]$,

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\, dt$$

Correction : Pour $x \in]0, 1]$, changement de variable affine $u \mapsto t = ux$ ... La formule reste valable pour $x = 0$ $(1 - \alpha > 0)$.
b) Montrer que, pour tout élément f de E, la fonction $A_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$.

Correction : Comme $x \mapsto x^{1-\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$, il suffit de montrer la continuité de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} \; dt$.

- Pour tout $x \in [0, 1]$, $t \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue (par morceaux) sur $[0, 1[$;
- pour tout $t \in [0, 1[$, $x \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$;
- domination sur $[0, 1]$: pour tout $t \in [0, 1[$ et tout $x \in [0, 1]$, on a : $\left|\dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\right| \leq \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$; la fonction $t \mapsto \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ est continue, intégrable sur $[0, 1[$ et indépendante de x.

Donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} \; dt$ est continue sur $[0, 1]$; donc $A_\alpha f$ est continue sur $[0, 1]$.
c) Établir que l'application $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé E et que :

$$|||A_\alpha||| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}$$

Correction : Par linéarité de l'intégrale, A_α est linéaire. D'après (IV.A.2.b), A_α est un endomorphisme de E.
Continuité :

$\forall f \in E, \forall x \in [0,1], |A_\alpha f(x)| \leq x^{\alpha-1}. \int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha} \ dt \leq 1. \int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha} \ dt = \|f\| \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \ \|f\|.$
Donc,$\forall f \in E$, $\|A_\alpha f\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \ \|f\|$. On en déduit que l'endomorphisme A_α est continu et que $|||A_\alpha||| \leq \frac{1}{1-\alpha}$.
De plus, si f est la fonction constante 1, $\|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha} \ \|f\|$. Donc $|||A_\alpha||| = \frac{1}{1-\alpha}$.

IV.B - On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n\geq 0}$ par la condition initiale $A_\alpha^0 = id_E$ (application identique de E) et, pour tout $n \geq 0$, par la relation de récurrence suivante :

$$A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n$$

18) On pose $\beta = 1 - \alpha$.

a) Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0,1]$, établir l'inégalité suivante :

$$|A_\alpha^n f(x)| \leq \frac{x^{n\beta}(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$$

Correction : Pour $n = 1$, on reprend la méthode de majoration du (IV.A.2.c) :
pour tout $x \in [0,1]$, $|A_\alpha(x)| \leq x^\beta \|f\| \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = x^\beta \|f\| \frac{1}{\beta} = x^\beta \|f\| \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)}$.

Soit $n \geq 1$; on suppose : $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leq x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.
Soit $x \in [0,1]$; $\left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| = x^\beta \left| \int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha} \ dt \right| \leq x^\beta \int_0^1 \frac{|A_\alpha^n f(xt)|}{(1-t)^\alpha} \ dt \leq x^\beta x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| \int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha} \ dt.$
Donc

$$\begin{aligned}\left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| &\leq x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta+1, 1-\alpha) \|f\| = x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta+1, \beta) \|f\| \\ &= x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \frac{\Gamma(n\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \|f\| = x^{(n+1)\beta} \frac{\Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \|f\|.\end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leq x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et que :

$$|||A_\alpha^n||| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}$$

Correction : On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|A_\alpha^n f\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$. Autrement dit, l'endomorphisme A_α^n de E est continu et

$$\|A_\alpha^n\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

19) Pour tout nombre réel positif γ, montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0$$

On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire I.3.

Correction : Soit $\gamma > 0$; alors $\gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{(\gamma\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{1}{(\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)}} \frac{((\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)})^{n\beta+1}}{\Gamma(1+n\beta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'après (I.3).

20) Soient λ un nombre complexe non nul et f un élément de E.

a) Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$.

On note g la somme de cette série de fonctions.

Correction : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\lambda^n A_\alpha^n f\| \leq |\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.
Or $|\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (2|\lambda|)^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = o\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$; donc la série $\sum |\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$ converge et la série $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.
b) Prouver que

$$(id_E - \lambda A_\alpha)g = f$$

Correction : Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $(\operatorname{Id} E - \lambda A_\alpha) \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f = f - \lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f$.

Or $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge uniformément sur [0,1] vers g ; $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ est une suite d'éléments de E (c'est à dire de fonctions continues), donc g est continue ($g \in E$) et $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge vers g dans E. Comme $\operatorname{Id} E - \lambda A_\alpha$ est continu dans E, $\left((\operatorname{Id} E - \lambda A_\alpha) \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge dans E, c'est à dire uniformément sur $[0,1]$ vers $(\operatorname{Id} E - \lambda A_\alpha)g$.
D'autre part, $\left(\lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f\right)_N$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$, c'est à dire converge vers 0 dans E.
Donc $(\operatorname{Id} E - \lambda A_\alpha)g = f$.

c) En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $id_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n(f)$.

Correction : D'après la question précédente, $(\operatorname{Id} E - \lambda A_\alpha) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n = \operatorname{Id} E$.

On montre de même : $\forall f \in E$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right) (\operatorname{Id} E - \lambda A_\alpha) f = f$, c'est à dire $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right) (\operatorname{Id} E - \lambda A_\alpha) = \operatorname{Id} E$.

Donc $\operatorname{Id} E - \lambda A_\alpha$ est inversible dans E, d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$.

IV.C - Pour tout entier naturel n, on note e_n la fonction monômiale $t \mapsto t^n$.

21) Soit n un entier naturel.

a) Calculer $A_\alpha e_n$.

Correction : $A_\alpha e_n(x) = x^\beta \displaystyle\int_0^1 \frac{(xt)^n}{(1-t)^\alpha} \quad dt = x^{\beta+n} B(n+1, \beta) = x^{\beta+n} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}$; donc $A_\alpha e_n = B(n+1, \beta) e_{n+\beta} = \dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} e_{n+\beta}$ en prolongeant la définition des e_k à $k \in [0, +\infty[$. Le résultat précédent reste vrai pour tout $n \in [0, +\infty[$.
b) En déduire que :

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}$$

Correction :

$$\begin{aligned}
(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} A_{1-\alpha}(e_{n+\beta}) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} . \frac{\Gamma((n+\beta)+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma((n+\beta)+1+(1-\beta))} e_{(n+\beta)+1-\beta} \\
&= \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} e_{n+1} = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{n+1} e_{n+1} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

22) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante :

$$\forall x \in [0,1] \quad , \quad Pf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} Pe_n$$

Établir que, pour toute fonction polynômiale ψ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P\psi$$

Correction : Vrai par linéarité ...

23) Formule d'inversion d'Abel.

a) Montrer que l'endomorphisme P est un endomorphisme continu de E tel que :

$$|||P||| = \sup_{\|f\|\leq 1} \|Pf\| = 1$$

Correction : Pour tout $f \in E$, Pf est bien continu ; de plus, P est linéaire.
Soit $f \in E$; alors $\forall x \in [0,1], |Pf(x)| \leq \displaystyle\int_0^x |f(t)| \quad dt \leq \int_0^x \|f\| \quad dt = \|f\|\,x \leq \|f\|$; donc $\|Pf\| \leq \|f\|$.
Donc P est linéaire continu et $\|P\| \leq 1$.
De plus, si f est l'application constante 1, alors $Pf : x \mapsto x$; donc $\|Pf\| = \|f\|$. Donc $\|P\| = 1$.
b) On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. Montrer que :

$$B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P$$

Correction : L'ensemble $(\mathcal{P})$ des fonctions polynômiales sur $[0,1]$ est dense dans E pour la norme $\|.\|$ (théorème de Weierstrass). Comme B_α et $\dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha} P$ sont deux applications continues sur E coïncidant sur $(\mathcal{P})$, elles sont égales.

c) Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ associe sa dérivée.

Montrer que $D \circ B_\alpha$ est bien défini et que :

$$D \circ B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} id_E$$

Correction : Comme P est à valeurs dans $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{C})$, $D \circ B_\alpha$ est bien défini. Comme $D \circ P = \mathrm{Id}\,E$, on a la formule de l'énoncé.
d) En déduire que l'opérateur A_α est injectif.
Correction : Soit $f \in E$ tel que $A_\alpha f = 0$; alors $B_\alpha f = 0$, donc $P \circ B_\alpha f = 0$; avec la relation du (IV.C.3.c), $f = 0$.
Donc l'opérateur (linéaire) A_α est injectif.