Devoir surveillé n°4

MP Clemenceau 2023-24

Jeudi 21 décembre 2023

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence ! !
Le sujet comporte deux problèmes au choix.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroter ces dites copies.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations, définitions et rappels

Pour toute fonction $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.

I. Quelques exemples de calculs de longueurs

I.1. Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t$.

I.2. Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$.

I.3. Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe.

I.3.1 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1/\sqrt{2}]$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.

I.3.2 Retrouver le résultat de la question précédente sans calcul, par des considérations géométriques.

I.4. Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t^2$. Calculer $L(f)$, en utilisant une intégration par parties ou en s'inspirant de la question **I.2**.

II. Un calcul approché de longueur

L'objectif de cette partie est d'effectuer un calcul approché de la longueur d'un arc d'hyperbole. On considère, pour ce faire, la fonction f définie sur $[1/2, 1]$ par $f(t) = 1/t$.

II.1. Expression intégrale de $L(f)$

II.1.1 Donner une expression intégrale de $L(f)$.

II.1.2 Montrer que $L(f)$ est aussi la longueur de l'arc d'hyperbole correspondant à la restriction de f à l'intervalle $[1,2]$.

II.2. **Expression de $L(f)$ sous forme de série numérique**

II.2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$, en précisant son domaine de validité.

II.2.2 Montrer que, pour tout $t \in]0,1[$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n-2}$$

II.2.3 On note, pour tout entier n, $a_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et donner un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

II.2.4 En déduire une expression de $L(f)$ comme somme d'une série numérique (on vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé).

II.2.5 Donner une valeur approchée de $L(f)$ en utilisant les 5 premiers termes de la série obtenue à la question précédente et donner une majoration de l'erreur commise.

III. Longueur du graphe des fonctions puissances

On s'intéresse ici, pour tout entier $n \geq 1$, aux fonctions puissances p_n définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1],\ p_n(t) = t^n$$

On désigne par $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n = L(p_n) = \int_0^1 \sqrt{1+n^2 t^{2n-2}}\, dt$$

III.1. Conjecture sur la limite éventuelle de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

III.1.1 Déterminer λ_1 et λ_2.

III.1.2 En traçant, sur un même graphe, les courbes représentatives de quelques fonctions p_n avec n de plus en plus grand, conjecturer la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite éventuelle.

III.2. Convergence et limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

III.2.1 Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}\,dt = \mu_n \quad \text{où} \quad \mu_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}$$

III.2.2 Montrer que $\lambda_n < 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.3 Déterminer la limite de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

III.2.4 En déduire la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite.

III.3. Plus généralement, montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a alors $L(f) < 2$.

IV. Un résultat inattendu

IV.1. Etude de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

IV.1.1 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

IV.1.2 Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

IV.1.3 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ est convergente.

IV.1.4 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt$ est divergente. En déduire la divergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$.

IV.2. On désigne par g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \int_x^1 g(t)\,dt$.

IV.2.1 Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

IV.2.2 Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0,1]$.

IV.2.3 Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\,dt = +\infty$$

IV.3. Pour tout réel $x \in]0,1]$, on désigne par $\lambda(x)$ la longueur de la courbe représentative de la restriction de la fonction f au segment $[x,1]$. Donner une expression intégrale de $\lambda(x)$ pour $x \in]0,1]$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

V. Continuité de la fonction longueur

On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note $E_1 = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

V.1. Comparaison des normes $\|.\|$ **et** $\|.\|_\infty$

V.1.1 Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1.

V.1.2 Montrer que

$$\forall f \in E_1,\ \|f\|_\infty \leq \|f\|$$

V.1.3 Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?

V.2. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$

V.2.1 Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

V.2.2 On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geq \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$

V.2.3 L'application $L\ :\ f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|_\infty)$?

V.2.4 L'application $L\ :\ f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|)$?

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$, et $\mathscr{L}_c(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même.

Soit v un élément de $\mathscr{L}_c(E)$, et f un élément de E ; l'image de f par v est notée vf. L'espace $\mathscr{L}_c(E)$ est muni de la norme $v \mapsto |||v||| = \sup\limits_{\|f\|\leq 1} \|vf\|$(on ne demande pas de vérifier que c'est une norme).

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, on met en place dans les deux premières parties des outils nécessaires à cette étude.

Rappels

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par la formule suivante :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et, pour tout entier naturel k et tout nombre réel $x>0$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

De plus, pour tout $x>0$, cette fonction vérifie l'équation

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Comme $\Gamma(1)=1$, il en découle que, pour tout entier naturel n,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Partie I : Questions préliminaires

1) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1,2[$ tel que $\Gamma'(c)=0$.

2) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$.

3) Montrer que, pour tout nombre réel $\gamma>0$,

$$\gamma^x = \circ(\Gamma(x)) \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

Partie II : Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A - Soit ϕ une application continue de l'intervalle $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $t_0\geq 0$ tel que la fonction ϕ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.

4) Établir que la fonction ϕ est positive sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$.
(on pourra raisonner par l'absurde).

5) Soit h un réel strictement positif.

a) Prouver que pour n suffisamment grand, $0 \leq h\phi(nh) \leq \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\, \mathrm{d}t$.

Correction : Pour $n \geq (t_0/h)+1$: on a $[(n-1)h, nh] \subset [t_0,+\infty[$, ϕ est donc décroissante et positive sur cet intervalle et donc, pour tout $t\in[(n-1)h,nh]$ $\phi(t)\geq\phi(nh)$.
Donc $\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\, \mathrm{d}t \geq \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(nh)\, \mathrm{d}t = h\phi(nh) \geq 0.$

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ converge.

Correction : La série $\sum h\phi(nh)$ est une série à termes positifs à partir d'un certain rang. La suite des sommes partielles est donc croissante à partir d'un certain rang.
D'après la question précédente on a, pour $N \geqslant n_0 \geqslant (t_0/h)+1$

$$\sum_{n=0}^{N} h\phi(nh) \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} h\phi(nh) + \sum_{n=n_0+1}^{N} h\phi(nh) \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} h\phi(nh) + \sum_{n=n_0+1}^{N} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,dt$$

Or la fonction ϕ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et par conséquent sur $[n_0h,+\infty[$. Par positivité de ϕ sur ce dernier intervalle (inclus dans $[t_0,+\infty[$), on obtient alors

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,dt = \int_{n_0h}^{Nh} \phi(t)\,dt \leqslant \int_{n_0h}^{+\infty} \phi(t)\,dt$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum h\phi(nh)$ est donc croissante à partir d'un certain rang et majorée, elle est donc convergente.
Remarque : en fait, si on accepte le théorème de comparaison de séries intégrales avec les hypothèses de décroissance et positivité de la fonction à partir d'un certain rang alors on retrouve le résultat.
II.A.3) Prouver que

$$\lim_{h\to 0, h>0} h\sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt$$

(On pourra introduire un nombre réel a suffisamment grand et écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{a}{h}\right]} h\phi(nh) + \sum_{n=\left[\frac{a}{h}\right]+1}^{+\infty} h\phi(nh)$$

où $\left[\dfrac{a}{h}\right]$ désigne la partie entière de $\dfrac{a}{h}$.)

Correction : Pour $n \geq (t_0/h)+1$, pour la même raison qu'au (II.A.2.a) :
$h\phi(nh) \leq \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,dt \leq h\phi((n-1)h)$.
On note n_0 la partie entière de $(t_0/h)+2$.
On a alors : $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi(nh) \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\,dt = \int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t)\,dt \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi((n-1)h) = \sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh)$,
donc $0 \leq \displaystyle\sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t)\,dt \leq h\phi((n_0-1)h)$.
De plus, $\displaystyle\left|\int_0^{(n_0-1)h} \phi(t)\,dt - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh)\right| = \left|\sum_{n=0}^{n_0-2} \int_{nh}^{(n+1)h} (\phi(t)-\phi(nh))\,dt\right| \leq \sum_{n=0}^{n_0-2} \int_{nh}^{(n+1)h} |\phi(t)-\phi(nh)|\,dt$
Comme $\forall t \in [nh,(n+1)h]$, $|t-nh| \leq h$:

$$\left|\int_0^{(n_0-1)h} \phi(t)\,dt - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh)\right| \leq (n_0-1)h.\sup\{|\phi(t)-\phi(u)|\,, t,u \in [0,(n_0-1)h], |t-u| \leq h\}$$

Or $(n_0-1)h \leq t_0+h$. On se limite à $h \in]0,1]$; ainsi $(n_0-1)h \leq t_0+1$. Comme ϕ est continue sur le segment $[0,t_0+1]$, elle y est uniformément continue.
Soit $\epsilon > 0$; on peut trouver $h_0 \in]0,1]$ tel que $\forall t,u \in [0,t_0+1], |t-u| \leq h_0 \Longrightarrow |\phi(t)-\phi(u)| \leq \epsilon$.
Alors, pour $h \in]0,h_0]$, on a : $\displaystyle\left|\int_0^{(n_0-1)h} \phi(t)\,dt - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh)\right| \leq (t_0+1)\epsilon$.
Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \left(\int_0^{(n_0-1)h} \phi(t)\,dt - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh)\right) + \left(\int_{n_0-1}^{+\infty} \phi(t)\,dt - \sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi(nh)\right)$,
on en déduit :

$$\left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \leq (t_0+1)\epsilon + h\phi((n_0-1)h)$$

Comme ϕ est continue sur le segment $[0, t_0 + 1]$, elle y est bornée.
Or $(n_0 - 1)h \in [0, t_0 + 1]$; donc $h\phi((n_0 - 1)h) \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$.
On peut donc trouver $h_1 > 0$ tel que $\forall h \in]0, h_1]$, $|h\phi((n_0 - 1)h)| \leq \epsilon$.
Finalement, pour tout $h \in]0, \min(h_0, h_1)]$, on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \right| \leq ((t_0 + 2)\epsilon.$$

Comme t_0 est une donnée, on peut conclure : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \xrightarrow[h \to 0, h > 0]{} 0$.

II.B - Pour tout nombre réel $\alpha \geq 1$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par la formule $g_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-t}\, t^{\alpha - 1}$.

II.B.1) Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A.
En déduire que

$$\lim_{x \to 1, x < 1} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \Gamma(\alpha)$$

Correction : Pour $\alpha < 1$, la fonction g_α ne peut être prolongée en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
Pour la suite, on suppose $\alpha \geq 1$. Alors g_α est continue sur $[0, +\infty[$ (après prolongement naturel en 0) et intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'intégrale $\Gamma(\alpha)$) car au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}^{-t}\, t^{\alpha-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'_\alpha(t) = e^{-t} t^{\alpha-2}(-t + \alpha - 1)$. Donc g'_α est négative sur $[\alpha - 1, +\infty[$ et g_α est décroissante sur cet intervalle. Les hypothèses du (II.A) sont donc satisfaites par $g_\alpha,\ \alpha \geq 1$.

Pour $x \in]0, 1[$, $h = -\ln x > 0$ et $h \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(nh) = (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x))$; comme $h \xrightarrow[x \to 1, x < 1]{} 0$ avec $h > 0$, d'après (II.A), $(-\ln x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x)) \xrightarrow[x \to 1, x < 1]{} \int_0^{+\infty} g_\alpha = \Gamma(\alpha)$.

II.B.2) On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha - 1} x^n$.

a) Établir que cette série est correctement définie pour $x \in\ ]-1, 1[$. On note S_α la somme de cette série de fonctions.

Correction : On étudie la convergence absolue de la série $\sum n^{\alpha-1} x^n$ pour $x \neq 0$:
$\dfrac{\left|(n+1)^{\alpha-1} x^{n+1}\right|}{|n^{\alpha-1} x^n|} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha - 1} |x| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |x|$; d'après la règle de d'Alembert, comme $\left|n^{\alpha-1} x^n\right| > 0$ pour tout $n \geq 1$, si $|x| < 1$, la série $\sum \left|n^{\alpha-1} x^n\right|$ converge, si $|x| > 1$, elle diverge.
Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum n^{\alpha-1} x^n$ vaut 1.

b) Prouver que, lorsque x tend vers 1 avec $x < 1$, alors :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1 - x)^\alpha}$$

Correction : Pour $x \in]0, 1[$, $g_\alpha(-n \ln x) = (-\ln x)^{\alpha-1} n^{\alpha-1} x^n = (-\ln x)^{\alpha-1} S_\alpha(x)$.
Pour $\alpha \geq 1$:
$-\ln x\, g_\alpha(-n \ln x) = (-\ln x)^\alpha S_\alpha(x) \xrightarrow[x \to 1, x < 1]{} \Gamma(\alpha) \neq 0$; donc $S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(-\ln x)^\alpha}$ au voisinage de 1^-. Comme $\ln x \sim x - 1$ au voisinage de 1 : $S_\alpha(x) \sim \dfrac{\Gamma(\alpha)}{(1 - x)^\alpha}$ au voisinage de 1^-.

Partie III : La première fonction eulérienne

III.A -

III.A.1) Établir que, pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$.

Correction : La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0,1[$. Équivalente en 0^+ à $t^{\alpha-1}$, elle est intégrable sur $]0,1/2]$ si et seulement si $\alpha-1>-1$, c'est à dire $\alpha>0$. Équivalente en 1^- à $(1-t)^{\beta-1}$, elle est intégrable sur $[1/2,1[$ si et seulement si $\beta-1>-1$, c'est à dire $\beta>0$. Elle est donc intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si α et β sont strictement positifs.

Pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs, on pose :

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$$

III.A.2) Prouver successivement pour tout couple (α,β) de nombres réels strictement positifs les relations suivantes :

(i) $\quad B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$

(ii) $\quad B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt$ (on pourra utiliser le changement de variable $u=\dfrac{t}{1-t}$.)

(iii) $\quad B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$

Correction :

i) L' égalité est obtenue avec le changement de variable affine $t\mapsto u=1-t$, qui est un difféomorphisme (application bijective de classe $\mathscr{C}^1$ et de réciproque de classe $\mathscr{C}^1$) de $]0,1[$ sur lui-même.

ii) $u=\dfrac{t}{1-t}\iff t=\dfrac{u}{u+1}$; $u\mapsto t=\dfrac{u}{1+u}$ est un difféomorphisme de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$, de dérivée $u\mapsto=\dfrac{1}{(1+u)^2}$; $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}=\left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha+\beta-2}=u^{\alpha-1}\dfrac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}$.

Donc $B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}\frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}\frac{1}{(1+u)^2}\;du=\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}\;du.$

iii) Soit $\epsilon\in]0,1/2]$; on fait une intégration par parties sur un segment,

$\displaystyle\int_\epsilon^{1-\epsilon}t^\alpha(1-t)^{\beta-1}\;dt=\left[t^\alpha\frac{-(1-t)^\beta}{\beta}\right]_\epsilon^{1-\epsilon}+\frac{\alpha}{\beta}\int_\epsilon^{1-\epsilon}t^{\alpha-1}(1-t)^\beta\;dt.$

Comme α et β sont strictement positifs, $t^\alpha\dfrac{-(1-t)^\beta}{\beta}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ou 1 ;

donc $\left[t^\alpha\dfrac{-(1-t)^\beta}{\beta}\right]_\epsilon^{1-\epsilon}\xrightarrow[\epsilon\to0]{}0.$

De plus, $t^{\alpha-1}(1-t)^\beta=t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1-t)=t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}-t^\alpha(1-t)^{\beta-1}$;

donc $\displaystyle\int_\epsilon^{1-\epsilon}t^{\alpha-1}(1-t)^\beta\;dt\xrightarrow[\epsilon\to0]{}B(\alpha,\beta)-B(\alpha+1,\beta).$

On en déduit : $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\beta}(B(\alpha,\beta)-B(\alpha+1,\beta))$; puis : $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$

Reamrque : on peut aussi faire une intégration par parties à partir de la formule ii), en la justifiant correctement, à partir de $B(\alpha+1,\beta)$.

III.B - On se propose d'établir pour tout réel $\alpha>0$ et tout réel $\beta>0$ la formule suivante :

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

III.B.1) À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels α et β sont strictement supérieurs à 2.

Correction : On suppose que pour tout $\alpha,\beta>2$, $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Soit $\alpha,\beta>0$; à l'aide de la formule IIA2iii) on a

$$\begin{aligned}B(\alpha,\beta)&=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\alpha+2,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}B(\beta,\alpha+2)\\&=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}B(\beta+1,\alpha+2)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}\frac{\alpha+\beta+3}{\beta+1}B(\beta+2,\alpha+2).\end{aligned}$$

Comme $\alpha+2$ et $\beta+2$ sont strictement supérieurs à 2 :

$B(\beta+2,\alpha+2)=\dfrac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)}=\dfrac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)(\beta+1)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Après substitution et simplification, en utilisant les propriétés de la fonction Γ rappelées : $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Il suffit donc bien d'avoir le résultat pour $\alpha+2$ et $\beta+2$ sont strictement supérieurs à 2.

III.B.2) Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$u_n(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a) Établir que la fonction $\psi_{\alpha,\beta}: t\mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitzienne sur le segment $[0,1]$.

Correction : Comme $\alpha-1$ et $\beta-1$ sont strictement plus grands que 1, $\psi_{\alpha,\beta}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, donc sa dérivée est bornée. Donc $\psi_{\alpha,\beta}$ est lipschitzienne.

On note $A_{\alpha,\beta}$ un rapport de Lipschitz de cette fonction, c'est-à-dire que :

$$\forall(x,y)\in[0,1]^2\quad,\quad|\psi_{\alpha,\beta}(x)-\psi_{\alpha,\beta}(y)|\leq A_{\alpha,\beta}\,|x-y|$$

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif :

$$|u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)|\leq\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}$$

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}^*$; $B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\ dt.$

Comme, sur $[k/n,(k+1)/n]$, $\left|\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right|\leq A_{\alpha,\beta}\left|t-\frac{k}{n}\right|=A_{\alpha,\beta}(t-\frac{k}{n})$, on a :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\ dt\right|\leq\int_{k/n}^{(k+1)/n}A_{\alpha,\beta}(t-\frac{k}{n})\ dt=A_{\alpha,\beta}.\frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit : $|B(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)|\leq\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}(\frac{k}{n})\right)\ dt\right|\leq n.\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n^2}=\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}.$

c) On reprend les notations de la question II.B.2.

Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$:

$$S_\alpha(x)S_\beta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n$$

Déduire de la question 2.b) que, pour tout réel x, $0\leq x<1$,

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)|\leq\frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)$$

En utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma\geq1}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

Correction : Pour $x\in[0,1[$, les séries $\sum n^{\alpha-1}x^n$ et $\sum n^{\beta-1}x^n$ convergent absolument (séries entières de rayon de convergence 1), donc la série produit converge absolument et sa somme est le produit des sommes, soit $S_\alpha(x)S_\beta(x)$.

Le terme d'ordre n de la série produit vaut :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}x^n=n^{\alpha+\beta-2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}x^n=n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n.$

On en déduit que : $S_\alpha(x)S_\beta(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n.$

Par différence : $S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-1}\left(u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)\right)x^n.$

Avec la majoration du (2.b), on obtient :

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \le \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}\,|u_n(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)|\,x^n \le \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-2}x^n = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

En multipliant par $(1-x)^{\alpha+\beta}$:
$\left|(1-x)^\alpha S_\alpha(x).(1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha,\beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x)\right| \le \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x)$.
Comme α, β, $\alpha+\beta$ et $\alpha+\beta-1$ sont tous supérieurs à 1, on peut utiliser la question (II.B.2) :
$(1-x)^\alpha S_\alpha(x).(1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha,\beta).(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$
et $\frac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x).(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x) \xrightarrow[x\to 1, x<1]{} 0$;
donc $|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)| \le 0$, c'est à dire $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = 0$.

III.C - Formule des compléments.

III.C.1) Établir que la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$.

Correction : D'après la question **B** on a $B(\alpha,1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$. La fonction $\alpha \mapsto B(\alpha,1-\alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$ comme composée de fonctions continues.
III.C.2) Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.
a) Vérifier que :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = 2q\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t$$

Correction : On a $(2p+1)/(2q) \in]0,1[$.
D'après le (III.A.2.ii), $B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{(2(p-q)+1)/2q)}}{1+t}\;dt$.
Le changement de variable $u \mapsto t = u^{2q}$, difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même, permet d'obtenir :
$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2(p-q)+1}}{1+u^{2q}}.2qu^{2q-1}\;du = 2q\int_0^{+\infty}\frac{u^{2p}}{1+u^{2q}}\;du.$
b) Pour tout entier k compris entre 0 et $q-1$, on note :

$$z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}$$

Établir que :

$$(*)\qquad \frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k}\right)$$

Correction : Les z_k, k compris entre 0 et $q-1$ et leurs opposés sont les $2q$ zéros de $X^{2q}+1$ (et ils sont simples).

Comme $A = X^{2p}$ a un degré strictement inférieur à $B = X^{2q}+1$, la partie entière de $\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ est nulle. Le développement en éléments simples de $\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ s'écrit donc : $\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{a_k}{X-z_k} + \frac{b_k}{X+z_k}\right)$, où les a_k et les b_k sont des nombres complexes définis par : $a_k = \frac{A(z_k)}{B'(z_k)}$ et $b_k = \frac{A(-z_k)}{B'(-z_k)}$.

Or $B' = 2qX^{2q-1}$ et $z_k^{2q} = -1$; donc $B'(z_k) = -\frac{2q}{z_k}$ et $B'(-z_k) = \frac{2q}{z_k}$; d'où la formule de l'énoncé.
c) Après avoir vérifié que, pour tout nombre complexe c de partie imaginaire non nulle, la fonction
$t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left((t-Re(c))^2 + (Im(c))^2\right) + i\arctan\left(\frac{t-Re(c)}{Im(c)}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction
$t \mapsto \frac{1}{t-c}$, prouver, en utilisant judicieusement la relation $(*)$, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$$

En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}$$

Correction : Vérification par simple dérivation ...

Pour tout k compris entre 0 et $q-1$, la fonction :

$$\begin{aligned}\omega_k : t \mapsto \quad & \left(\frac{1}{2}\ln\left((t-\Re z_k)^2+(\Im z_k)^2\right)+i\arctan\left(\frac{t-\Re z_k}{\Im z_k}\right)\right) \\ & \qquad -\left(\frac{1}{2}\ln\left((t+\Re z_k)^2+(-\Im z_k)^2\right)+i\arctan\left(\frac{t+\Re z_k}{-\Im z_k}\right)\right) \\ & = \tfrac{1}{2}\ln\frac{(t-\Re z_k)^2+(\Im z_k)^2}{(t+\Re z_k)^2+(\Im z_k)^2}+i\left(\arctan\left(\frac{t-\Re z_k}{\Im z_k}\right)+\arctan\left(\frac{t+\Re z_k}{\Im z_k}\right)\right)\end{aligned}$$

est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-z_k}-\dfrac{1}{t+z_k}$.

Comme $\operatorname{Im} z_k = \sin\pi\dfrac{2k+1}{2q} > 0$, $\omega_k(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi i$; et $\omega_k(0)=0$.

La fonction $\omega = -\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\,\omega_k$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^{2p}}{1+t^{2q}}$.

De plus, $\omega(0)=0$ et $\omega(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\pi = -i\dfrac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

On en déduit que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\;dt = \lim_{+\infty}\omega - \omega(0) = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

Or $z_k^{2p+1} = e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}.\left(e^{i\pi\frac{2p+1}{q}}\right)^k$ et $e^{i\pi\frac{2p+1}{q}} \neq 1$;

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}.\frac{e^{i\pi\frac{2p+1}{q}q}-1}{e^{i\pi\frac{2p+1}{q}}-1} = e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}.\frac{e^{i\pi(2p+1)}-1}{e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}\left(e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}-e^{-i\pi\frac{2p+1}{2q}}\right)} = \frac{-2}{2i\sin\pi\frac{2p+1}{2q}}$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\;dt = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\pi\frac{2p+1}{2q}}$.

III.C.3) Déduire de III.C.1 et III.C.2 que :

$$\forall\alpha\in]0,1[\quad , \quad B(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

Correction : Pour tout α de la forme $\alpha = \dfrac{2p+1}{2q}$, avec $0<p<q$, $p,q\in\mathbb{N}$, on a ainsi :

$B(\alpha,1-\alpha) = 2q\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\;dt = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

Comme $\alpha\mapsto B(\alpha,1-\alpha)$ et $\alpha\mapsto\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ sont continues sur $]0,1[$ et que l'ensemble des $\dfrac{2p+1}{2q}$, avec $0<p<q$, $p,q\in\mathbb{N}$, est dense dans $]0,1[$, on peut affirmer : $\forall\alpha\in]0,1[$, $B(\alpha,1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$.

De plus, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = B(\alpha,1-\alpha)\Gamma(\alpha+(1-\alpha)) = B(\alpha,1-\alpha)$.

Partie IV : L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

IV.A -

IV.A.1) Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, la fonction $f\mapsto\dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,x[$.

Correction : La fonction $t\mapsto\dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $[0,x[$ et, pour tout $t\in[0,x[$,

on a $\left|\dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\right| \leq \dfrac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$; comme $t\mapsto\dfrac{1}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0,x[$ (de référence, avec $\alpha<1$), $t\mapsto\dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0,x[$, donc sur $]0,x[$.

IV.A.2) Pour tout élément f de E, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } x=0$$

$$A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{si } 0<x\leq 1$$

a) Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0,1]$,

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Correction : Pour $x \in]0,1]$, changement de variable affine $u \mapsto t = ux$ ... La formule reste valable pour $x = 0$ $(1-\alpha > 0)$.

b) Montrer que, pour tout élément f de E, la fonction $A_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

Correction : Comme $x \mapsto x^{1-\alpha}$ est continue sur $[0,1]$, il suffit de montrer la continuité de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\ dt$.

- Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1[$;
- pour tout $t \in [0,1[$, $x \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0,1]$;
- domination sur $[0,1]$: pour tout $t \in [0,1[$ et tout $x \in [0,1]$, on a : $\left|\dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\right| \le \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$; la fonction $t \mapsto \dfrac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ est continue, intégrable sur $[0,1[$ et indépendante de x.

Donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\ dt$ est continue sur $[0,1]$; donc $A_\alpha f$ est continue sur $[0,1]$.

c) Établir que l'application $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé E et que :

$$|||A_\alpha||| = \sup_{\|f\|\le 1} \|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}$$

Correction : Par linéarité de l'intégrale, A_α est linéaire. D'après (IV.A.2.b), A_α est un endomorphisme de E.

Continuité :

$\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha f(x)| \le x^{\alpha-1}.\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\ dt \le 1.\int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}\ dt = \|f\|\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\ \|f\|$.

Donc,$\forall f \in E$, $\|A_\alpha f\| \le \dfrac{1}{1-\alpha}\ \|f\|$. On en déduit que l'endomorphisme A_α est continu et que $|||A_\alpha||| \le \dfrac{1}{1-\alpha}$.

De plus, si f est la fonction constante 1, $\|A_\alpha f\| = \dfrac{1}{1-\alpha}\ \|f\|$. Donc $|||A_\alpha||| = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

IV.B - On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n\ge 0}$ par la condition initiale $A_\alpha^0 = id_E$ (application identique de E) et, pour tout $n \ge 0$, par la relation de récurrence suivante :

$$A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n$$

IV.B.1) On pose $\beta = 1-\alpha$.

a) Pour tout entier $n \ge 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0,1]$, établir l'inégalité suivante :

$$|A_\alpha^n f(x)| \le \frac{x^{n\beta}(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\,\|f\|$$

Correction : Pour $n = 1$, on reprend la méthode de majoration du (IV.A.2.c) :

pour tout $x \in [0,1]$, $|A_\alpha(x)| \le x^\beta\,\|f\| \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = x^\beta\,\|f\|\,\frac{1}{\beta} = x^\beta\,\|f\|\,\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)}$.

Soit $n \ge 1$; on suppose : $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \le x^{n\beta}\dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\,\|f\|$.

Soit $x \in [0,1]$; $\left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| = x^\beta \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha}\ dt\right| \le x^\beta \int_0^1 \frac{|A_\alpha^n f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\ dt \le x^\beta x^{n\beta}\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\,\|f\|\int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha}\ dt$.

Donc

$$\begin{aligned}\left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| &\le x^{(n+1)\beta}\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}B(n\beta+1, 1-\alpha)\,\|f\| = x^{(n+1)\beta}\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}B(n\beta+1,\beta)\,\|f\| \\ &= x^{(n+1)\beta}\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\frac{\Gamma(n\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma((n+1)\beta+1)}\,\|f\| = x^{(n+1)\beta}\frac{\Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta+1)}\,\|f\|\,.\end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leq x^{n\beta} \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et que :

$$|||A_\alpha^n||| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}$$

Correction : On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|A_\alpha^n f\| \leq \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$. Autrement dit, l'endomorphisme A_α^n de E est continu et

$$\|A_\alpha^n\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

IV.B.2) Pour tout nombre réel positif γ, montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0$$

On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire I.3.

Correction : Soit $\gamma > 0$; alors $\gamma^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \dfrac{(\gamma\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \dfrac{1}{(\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)}} \dfrac{((\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)})^{n\beta+1}}{\Gamma(1+n\beta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'après (I.3).

IV.B.3) Soient λ un nombre complexe non nul et f un élément de E.

a) Prouver que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$.

On note g la somme de cette série de fonctions.

Correction : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\lambda^n A_\alpha^n f\| \leq |\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

Or $|\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (2|\lambda|)^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = o\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$; donc la série $\sum |\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$ converge et la série $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

b) Prouver que

$$(id_E - \lambda A_\alpha)g = f$$

Correction : Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{Id}\, E - \lambda A_\alpha) \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f = f - \lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f$.

Or $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge uniformément sur [0,1] vers g ; $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ est une suite d'éléments de E (c'est à dire de fonctions continues), donc g est continue ($g \in E$) et $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge vers g dans E. Comme $\mathrm{Id}\, E - \lambda A_\alpha$ est continu dans E, $\left((\mathrm{Id}\, E - \lambda A_\alpha) \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge dans E, c'est à dire uniformément sur $[0,1]$ vers $(\mathrm{Id}\, E - \lambda A_\alpha)g$.

D'autre part, $\left(\lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f\right)_N$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$, c'est à dire converge vers 0 dans E.

Donc $(\mathrm{Id}\, E - \lambda A_\alpha)g = f$.

c) En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $id_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n(f)$.

Correction : D'après la question précédente, $(\mathrm{Id}\, E - \lambda A_\alpha) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n = \mathrm{Id}\, E$.

On montre de même : $\forall f\in E$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n A_\alpha^n\right)(\mathrm{Id}\,E-\lambda A_\alpha)f=f$, c'est à dire $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n A_\alpha^n\right)(\mathrm{Id}\,E-\lambda A_\alpha)=\mathrm{Id}\,E$.

Donc $\mathrm{Id}\,E-\lambda A_\alpha$ est inversible dans E, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n A_\alpha^n$.

IV.C - Pour tout entier naturel n, on note e_n la fonction monômiale $t\mapsto t^n$.

IV.C.1) Soit n un entier naturel.

a) Calculer $A_\alpha e_n$.

Correction : $A_\alpha e_n(x) = x^\beta\int_0^1\frac{(xt)^n}{(1-t)^\alpha}\quad dt = x^{\beta+n}B(n+1,\beta) = x^{\beta+n}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}$; donc $A_\alpha e_n = B(n+1,\beta)e_{n+\beta}=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}e_{n+\beta}$ en prolongeant la définition des e_k à $k\in[0,+\infty[$. Le résultat précédent reste vrai pour tout $n\in[0,+\infty[$.

b) En déduire que :

$$(A_{1-\alpha}\circ A_\alpha)e_n=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\frac{e_{n+1}}{n+1}$$

Correction :

$$\begin{aligned}(A_{1-\alpha}\circ A_\alpha)e_n &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}A_{1-\alpha}(e_{n+\beta})=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}.\frac{\Gamma((n+\beta)+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma((n+\beta)+1+(1-\beta))}e_{(n+\beta)+1-\beta}\\ &= \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)}e_{n+1}=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{n+1}e_{n+1}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\frac{e_{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

IV.C.2) Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante :

$$\forall x\in[0,1]\quad,\quad Pf(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n,

$$(A_{1-\alpha}\circ A_\alpha)e_n=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}Pe_n$$

Établir que, pour toute fonction polynômiale ψ,

$$(A_{1-\alpha}\circ A_\alpha)\psi=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}P\psi$$

Correction : Vrai par linéarité ...

IV.C.3 Formule d'inversion d'Abel.

a) Montrer que l'endomorphisme P est un endomorphisme continu de E tel que :

$$|||P|||=\sup_{\|f\|\le 1}\|Pf\|=1$$

Correction : Pour tout $f\in E$, Pf est bien continu ; de plus, P est linéaire.
Soit $f\in E$; alors $\forall x\in[0,1], |Pf(x)|\le\int_0^x|f(t)|\quad dt\le\int_0^x\|f\|\quad dt=\|f\|\,x\le\|f\|$; donc $\|Pf\|\le\|f\|$.
Donc P est linéaire continu et $\|P\|\le 1$.
De plus, si f est l'application constante 1, alors $Pf: x\mapsto x$; donc $\|Pf\|=\|f\|$. Donc $\|P\|=1$.

b) On pose $B_\alpha=A_{1-\alpha}\circ A_\alpha$. Montrer que :

$$B_\alpha=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}P$$

Correction : L'ensemble $(\mathcal{P})$ des fonctions polynômiales sur $[0,1]$ est dense dans E pour la norme $\|.\|$ (théorème de Weierstrass). Comme B_α et $\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}P$ sont deux applications continues sur E coïncidant sur $(\mathcal{P})$, elles sont égales.

c) Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ associe sa dérivée.

Montrer que $D\circ B_\alpha$ est bien défini et que :

$$D\circ B_\alpha=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}id_E$$

Correction : Comme P est à valeurs dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$, $D\circ B_\alpha$ est bien défini. Comme $D\circ P = \mathrm{Id}\,E$, on a la formule de l'énoncé.

d) En déduire que l'opérateur A_α est injectif.

Correction : Soit $f\in E$ tel que $A_\alpha f=0$; alors $B_\alpha f=0$, donc $P\circ B_\alpha f=0$; avec la relation du (IV.C.3.c), $f=0$.

Donc l'opérateur (linéaire) A_α est injectif.