Correction : Devoir surveillé n°4

MP Clemenceau 2024-25

Jeudi 19 décembre 2024

Problème type CCINP

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

Partie 1. Exemples et contre-exemples

1) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par : $\forall x \in]0,1],\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

Correction : Supposons qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes qui converge uniformément vers $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,1]$. Vu que les polynômes P_n possèdent tous une limite finie lorsque x tend vers 0, on peut appliquer le théorème de la double limite, ce qui a pour conséquence que h possède une limite finie en 0^+, et cela est contradictoire. Une telle suite de polynômes n'existe donc pas.

Ce résultat illustre le fait qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de compacité du domaine $[a,b]$ dans le théorème de Weierstrass.

2) Soit N entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[a,b]$, de degré inférieur ou égal à N. Justifier que $\mathscr{P}_n$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

Correction : Dans l'espace vectoriel normé $E = \left(\mathscr{C}^0([a;b];\mathbb{R}); \|\,\|_\infty\right)$, l'ensemble $\mathscr{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie $(N+1)$, donc, par propriété c'est une partie fermée de E.

Si une fonction f de E est limite uniforme de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier N fixé, alors on a une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathscr{P}_n$ qui converge vers f (au sens de la norme sur E), donc sa limite f reste dans $\mathscr{P}_n$ (puisqu'il s ?'agit d ?'une partie fermée, elle est stable par passage à la limite). Cette fonction f est donc elle-même un polynôme de degré inférieur ou égal à N.

3) Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}[X],\ N_1(P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{x\in[1,2]} |P(x)|$$

3.a) Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

Correction : L'application N_1 est bien définie (car tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est continu, donc borné sur le segment $[-2,-1]$), et clairement positive. De plus :

- Si $N_1(P) = 0$, alors $dsup_{[-2,-1]}|P| = 0$, ce qui signifie que la fonction positive $|P|$ est nulle sur le segment $[-2,-1]$. Le polynôme P possède alors une infinité de racines, ce qui entraîne $P = 0$.

- Pour tout $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$, on a

$$N_1(\lambda P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda P(x)| = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda|\,|P(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)|$$

Donc $N_1(\lambda P) = |\lambda|\, N_1(P)$.
- Pour tous polynômes P, Q et pour tout $x \in [-2, -1]$, on a

$$|(P+Q)(x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)| \leqslant N_1(P) + N_1(Q)$$

Le réel $N_1(P)+N_1(Q)$ est un majorant de l'ensemble $\{|(P+Q)(x)|\,, x \in [-2,-1]\}$, il est donc plus grand que la borne supérieure de cet ensemble,c'est à dire

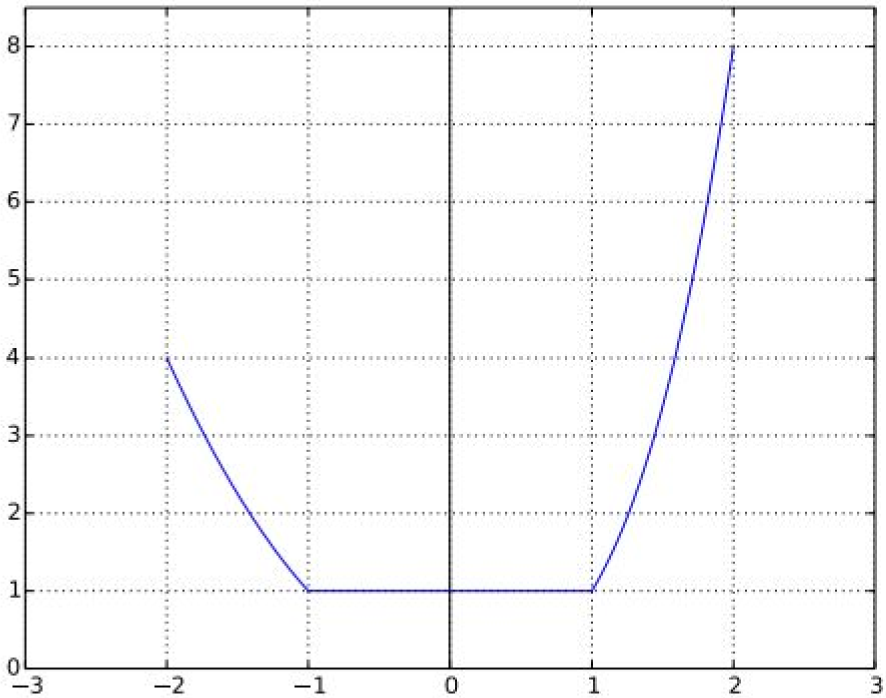
$$N_1(P+Q) \leqslant N_1(P) + N_1(Q)$$

L'application N_1 est donc bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

3.b) On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2, 2]$ ainsi :

$$\text{pour tout } x \in [-2,-1], f(x) = x^2,\ \text{pour tout } x \in [-1,1], f(x) = 1 \text{ et pour tout} x \in [1,2], f(x) = x^3$$

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2, 2]$.
Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.
Correction : Voici la représentation graphique de f :



La fonction f étant clairement continue sur $[-2, 2]$, il existe, d'après le théorème de Weierstrass, une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[-2, 2]$.
Cela signifie que $\sup_{x\in[-2,2]} |P_n(x)?f(x)|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini
En outre, en considérant la fonction polynomiale $f_1 : x \mapsto x^2$ (qui coïncide avec f sur $[-2, -1]$), on a

$$N_1(P_n - f_1) = \sup_{x\in[-2,-1]} |P_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[-2,2]} |P_n(x) - f(x)|$$

donc $N_1(P_n - f_1)$ tend aussi vers 0, ce qui prouve que dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_1)$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X^2.
De façon similaire, dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_2)$, la même suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X^3 (puisque la fonction $f_2 : x \mapsto x^3$ coïncide avec f sur $[1, 2]$).

Partie 2. Application : un théorème des moments

4) f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

$\left(\displaystyle\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a,b]\right)$.

4.a) Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)\,\mathrm{d}x$

Correction : Par linéarité de l'intégrale, si P est une fonction polynomiale, avec l'hypothèse pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, on a $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

4.b) Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur une partie I de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée sur I, alors la suite de fonctions $(f\cdot g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $f\cdot g$.

Correction : *Remarque : l'indication de l'énoncé est un peu lourd pour la rédaction. On peut en effet utiliser directement le même principe que la démonstration de l'inversion limite intégrale dans le cas d'un segment et de la convergence uniforme.*
Pour une preuve complète dans l'idée de l'indication voir l'exercice 48 de la banque CCINP.

Considérons une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ (une telle suite existe d'après le théorème de Weierstrass puisque f est continue).

On a pour tout entier n, par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire

$$\left|\int_a^b P_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |P_n(x)-f(x)|\,|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]}$$

Par hypothèse $\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. De plus, d'après la question précédente, $\displaystyle\int_a^b P_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$, et comme f est continue, $f=0$ sur $[a,b]$.

5) Application

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple (f,g) d'éléments de E par $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a,b]$ et l'orthogonal de F. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $E = F\oplus F^\perp$?

Correction : L'ensemble $F^\perp$ est formé des fonctions $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ qui vérifient $\displaystyle\int_a^b P_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout fonction polynomiale P. D'après la question précédente, seule la fonction nulle vérifie cette condition. On a donc $F^\perp = \{0_E\}$, donc $F\oplus F^\perp = F$. Vu que $F\neq E$ (il existe des fonctions continues sur [a ; b] non polynomiales), on a donc $F\oplus F^\perp \neq E$.

6)

6.a) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout n non nul, $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}$. la fonction $x\mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-(1-i)x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Comme, pour $x\in\mathbb{R}_+$, $\left|x^n\,\mathrm{e}^{-(1-i)x}\right| = x^n\,\mathrm{e}^{-x}$, $x^n\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ et que $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ est intégrable sur un voisinage de l'infini, I_n est convergente.

On considère les fonctions $u : x\mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ et $v : x\mapsto \mathrm{e}^{-(1-i)x}$. Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. De plus le produit admet, par croissance comparée, une limite finie en $+\infty$. On peut donc faire une intégration par parties de I_n.

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-(1-i)x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}(-(1-i))\,\mathrm{e}^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x = \frac{(1-i)}{n+1}I_{n+1}$$

Il suffit d'écrire une récurrence pour avoir la fin de la question.

6.b) En déduire que, pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{4k}\,\mathrm{e}^{-x}\,x^3\sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

Correction : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{+\infty} x^{4k}\,\mathrm{e}^{-x}\,x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\left(x^{4k+3}\,\mathrm{e}^{-(1-i)x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(I_{4k+3}\right)$$

Remarque : cela justifie la convergence de l'intégrale cherchée.

D'après la question précédente $I_{4k+3} = \dfrac{(4k+3)!}{\left((1-i)^4\right)^{k+1}} = \dfrac{(4k+3)!}{(-4)^{k+1}}$. I_{4k+3} est donc un réel, sa partie imaginaire est nulle.

D'où pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{4k}\,\mathrm{e}^{-x}\,x^3\sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

6.c) Proposer une fonction f continue sur $[0,+\infty[$, non nulle et vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } k,\ \int_0^{+\infty} u^k f(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

Correction : On considère l'intégrale précédente (convergente) et on fait le changement de variable $u = x^4$. La fonction $x \mapsto x^4$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc le changement est valide. On a alors

$$\int_0^{+\infty} x^{4k}\,\mathrm{e}^{-x}\,x^3\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} u^k \sin\left(u^{\frac{1}{4}}\right)\mathrm{e}^{-u^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}u$$

On pose alors $f : u \mapsto \sin\left(u^{\frac{1}{4}}\right)\mathrm{e}^{-u^{\frac{1}{4}}}$ pour $u \in \mathbb{R}_+$. Cette fonction est non nulle, continue et tous les moments sont nuls.

Remarque : Le théorème des moments montré à la question 4. ne se généralise donc pas aux intervalles non compacts.

6.d) Expliquer pourquoi la fonction proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0,+\infty[$ par une suite de polynômes.

Correction : Supposons que f soit limite uniforme sur $[0,+\infty[$ d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous avons alors $\|P_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[} \leqslant 1$ pour n supérieur à un certain rang $N \in \mathbb{N}$, ce qui implique

$$\forall n \geqslant N, \quad \forall x \in [0,+\infty[\quad |P_n(x)| \leqslant 1 + |f(x)|$$

Mais la fonction limite f est elle-même bornée sur $[0,+\infty[$ (car elle est continue et tend vers 0 en $+\infty$. On en déduit que pour tout $n \geqslant N$, le polynôme P_n est borné sur $[0,+\infty[$, donc constant (puisqu'un polynôme de degré supérieur à 1 a une limite infinie en $+\infty$). Ainsi, pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a (par convergence simple de (P_n) vers f) :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(0) = f(0)$$

ce qui entraîne que f est constante, et ceci est contradictoire ($f(1) \neq f(0)$ par exemple). La fonction f n'est donc pas une limite uniforme de polynômes sur $[0,+\infty[$.

Partie 3. Exemple via un théorème de Dini

7) Question préliminaire

Soit $x \in [0,1]$, on note $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in I, g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence valable pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left(x - (u_n)^2\right) = g_x(u_n)$$

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer, en fonction du réel x, sa limite.

Correction : Une étude rapide montre que la fonction polynomiale $g_x : t \mapsto t + \frac{1}{2}(x - t^2)$ est strictement croissante sur $I =]-\infty, \sqrt{x}]$, et que $g_x(I) = I$.

Le premier terme $u_0 = 0$ est dans I (puisque $x \geqslant 0$), donc la suite est correctement définie et majorée par $\sqrt{x}$.

D'autre part, $u_1 = g_x(u_0) = g_x(0) = \frac{x}{2}$, donc $u_1 \geqslant u_0$, donc la croissance de g_x sur l'intervalle I implique celle de la suite (u_n).

La suite (u_n) est donc croissante et majorée, ce qui entraîne sa convergence vers un réel ℓ tel que $g_x(\ell) = \ell$ par continuité de g_x, c'est-à-dire tel que $x - \ell^2 = 0$. Or, (u_n) ne peut pas converger vers $-\sqrt{x}$ si x est strictement positif car sa limite est supérieure à $u_0 = 0$, donc elle converge vers $\sqrt{x}$.

8) Proposer un exemple de suite (f_n) de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement mais non uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f qui est continue. Il sera possible de s'appuyer sur une représentation graphique sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.
Correction : cf cours

Pour traiter la suite de cette partie, on pourra admettre le résultat suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f elle même continue sur $[a,b]$. Si la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire : pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [a,b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

9) Application
Soit (P_n) la suite de fonctions polynômes définie par :

$$P_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right)$$

9.a) Justifier que la suite (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.
Correction : Pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite (u_n) étudiée à la question 7, puisque $P_0(x) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = g_x(P_n(x))$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1]$, la suite de polynômes (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

9.b) Démontrer que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.
Correction : Les P_n et la fonction limite sont continues sur $[0,1]$, et, pour tout x, la suite $(P_n(x))$ est croissante d'après la question 7. D'après le théorème de Dini, la convergence des (P_n) vers $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

Dans toute cette partie, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$.
On pose : $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

10) S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.

10.a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P(|Sn - nx| > n\alpha) \leq \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.
Correction : La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale, elle admet donc une variance finie (et par suite une espérance) on peut donc utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$$

Remarque : dans le cours, et plusieurs références, l'inégalité s'énonce avec des inégalités larges. On la rencontre quelques fois aussi avec $\mathbf{P}\left(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| > \varepsilon\right)$. J'utilise celle du cours.
Comme S_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$ on a $\mathbf{E}(S_n) = nx$ et $\mathbf{V}(S_n) = nx(1-x)$. Soit α un réel strictement positif, on a alors, avec $\varepsilon = n\alpha$:

$$\mathbf{P}\left(|S_n - nx| \geqslant n\alpha\right) \leqslant \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2}$$

Or on a $(|S_n - nx| > n\alpha) \subset (|S_n - nx| \geqslant n\alpha)$ et par croissance de la probabilité $\mathbf{P}\left(|S_n - nx| > n\alpha\right) \leqslant \mathbf{P}\left(|S_n - nx| \geqslant n\alpha\right)$, d'où

$$\mathbf{P}\left(|S_n - nx| > n\alpha\right) \leqslant \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}$$

La fonction $x \mapsto x(1-x)$ est positive et admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$ qui vaut $\dfrac{1}{4}$, d'où le résultat :

$$P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

10.b) Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)$$

Correction : S_n étant à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ la famille $\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}(S_n=k)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est finie donc sommable. On peut alors utiliser la formule de transfert et on a :

$$\mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}\left(S_n=k\right)$$

Sachant que $S_n \sim \mathscr{B}(n,x)$ on a alors :

$$\mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

11)

11.a) Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a,b) \in [0,1]^2$, $|a-b| \leq \alpha$ entraîne $|f(a)-f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n}-x\right| \leq \alpha$.

Correction : f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$, d'après le théorème de Heine (*il est important de le citer*), f est uniformément continue sur $[0,1]$. On a donc, par définition de la continuité uniforme,

$$\forall\varepsilon > 0\exists\alpha > 0, \forall(a,b)\in[0,1]^2\ \ |a-b| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(a)-f(b)| < \varepsilon$$

Pour $\varepsilon > 0$ et un tel α on a alors, pour $k\in[\![0,n]\!]$ et $x\in[0,1]$, tels que $\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \alpha$, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| < \varepsilon$.

11.b) Justifier que $\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$.

Correction : on commence par utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right| \leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\right)P(S_n=k)$$

Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée et donc on obtient

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right| \leqslant 2\,\|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} P(S_n=k)$$

On a de plus l'égalité suivante (*sur les événements*) :

$$\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right) = \bigcup_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}(S_n=k)$$

Cette union étant disjointe, par σ additivité on obtient

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right) = \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\mathbf{P}\left(S_n=k\right)$$

On en déduit :

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$$

11.c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, puis conclure.

Correction : Comme l'image de S_n est $[\![0,n]\!]$ on a $\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_n = k) = 1$. De plus S_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$. On en déduit que :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbf{P}(S_n = k)$$

On a alors :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbf{P}(S_n = k) + \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbf{P}(S_n = k)$$

Par inégalité triangulaire on a alors :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{P}(S_n = k) + \left|\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbf{P}(S_n = k)\right|$$

A l'aide de la question **2a)**, on a $\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{P}(S_n = k) \leqslant \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha} \mathbf{P}(S_n = k)$. Or on a $\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha} \mathbf{P}(S_n = k) \leqslant \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \mathbf{P}(S_n = k)$.

Cette dernière somme étant égale à 1, on en déduit que $\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{P}(S_n = k) \leqslant \varepsilon$.

Les événements $\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$ et $(|S_n - nx| > n\alpha)$ sont clairement égaux. On en déduit à l'aide des questions **2b** et **1a.**, que

$$+\left|\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbf{P}(S_n = k)\right| \leqslant 2\,\|f\|_\infty \frac{1}{4n\alpha^2}$$

La suite $\left(\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}\right)_n$ converge vers 0. Il existe donc un n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \leqslant \varepsilon$.
On en déduit que pour tout $n \leqslant n_0$, $|B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$.
n_0 ne dépend pas de x, donc l'inégalité est vraie pour tout $x \in [0,1]$.
On peut alors écrire, pour $n \geqslant n_0$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.
Conclusion : la suite $(B_n(f))$ est une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Problème de type CentraleSupélec

Notations

— Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.
— On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes.

I. Résultats préliminaires

I.A- Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

I.A.1)

Q 1. Montrer que $I_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$

Correction : Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leqslant 2$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geqslant \frac{1}{2^n}$ ce qui donne par croissance de l'intégrale : $I_n \geqslant \frac{1}{2^n}$.

Q 2. Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1.

Correction : La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Par ailleurs $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ car $2n > 1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

$\boxed{\text{Ce qui justifie l'existence de } K_n}$ et $\boxed{K_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{2}}$

Q 3. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

On pourra minorer $1+t^2$ par un polynôme de degré 1 .

Correction : On a $\forall t \geqslant 1,\ 1+t^2 \geqslant 1+t > 0$.

Soit $n \geqslant 2$. Par calcul dans $[0,+\infty]$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} (1+t)^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(1+t)^{-n+1}}{-n+1}\right]_{t=1}^{t\to+\infty} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} < +\infty$$

Or quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $\dfrac{1}{(n-1)2^{n-1}} \sim \dfrac{2}{n2^n} = O\left(\dfrac{1}{n2^n}\right)$

On a bien $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)}$

Q 4. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n \sim K_n$

Correction : À l'aide de la relation de Chasles et Q3, on a quand $n \longrightarrow +\infty$,

$$I_n - K_n = O\left(\frac{1}{n2^n}\right) = o\left(I_n\right)$$

car $\dfrac{1}{n2^n} = o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\dfrac{1}{2^n} = O\left(I_n\right)$ d'après la question 1.

On en déduit que $\boxed{I_n \sim K_n}$

Q 5. Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n}K_n$.

Correction : Sous réserve de validité, on effectue une intégration par parties :

$$K_n = \left[t \cdot \frac{1}{(1+t^2)^n}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t - 2n\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

L'intégration par parties est valide car le bloc tout intégré est nul et les intégrales sont convergentes..

Ainsi $K_n = 2nK_n - 2nK_{n+1}$ ce qui permet de conclure que $\boxed{K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n}K_n}$

Q 6. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On d'après ce qui précède : $K_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}K_n$.

Ainsi par récurrence ou produit, on a $K_n = \dfrac{\prod i = 1n-1(2i-1)}{\prod i = 1n-1(2i)}K_1 = \dfrac{\prod k = 12n-2k}{\left(\prod i = 1n-1(2i)\right)^2}\dfrac{\pi}{2}$. D'où

$$K_n = \frac{(2n-2)!}{\left(2^{n-1}\cdot(n-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}$$

En utilisant Stirling, quand $n \to +\infty$, on a :

$$\frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2} \sim \frac{\left(\dfrac{2n-2}{\mathrm{e}}\right)^{2n-2}\sqrt{2\pi(2n-2)}}{\left(\left(\dfrac{n-1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}\right)^2} \sim \frac{2^{2n-2}}{\sqrt{\pi n}}$$

À l'aide de la question Q4, on peut conclure que $\boxed{I_n \sim K_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}}$

I.A.2)

Q 7. Justifier que

$$\sqrt{n}I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u$$

Q 8. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Q 9. En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{puis de} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

I.B - Comportement asymptotique de $1 - \Phi$

Soit $x > 0$.

Q 10. En écrivant que $\varphi(t) \leqslant \dfrac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geqslant x$, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}$.

Q 11. À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que $\dfrac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$

Q 12. En déduire un équivalent simple de $1 - \Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.C - Une inégalité maximale

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et $Z_1, \ldots, Z_n$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $p \in intent1n$, on note $R_p = \sum_{i=1}^{p} Z_i$.
On va montrer la propriété

$$\forall x > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left\{\max_{1 \leqslant p \leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\right\}\right) \leqslant 3 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|R_p| \geqslant x\}\right)$$

On admet que les différentes fonctions intervenant dans cette inégalité sont bien des variables aléatoires discrètes.
Pour simplifier, notons A l'événement $\left\{\max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\right\}$. Ainsi,

$$A = \left\{\omega \in \Omega \ / \max_{1 \leqslant p \leqslant n} |R_p(\omega)| \geqslant 3x\right\}.$$

Dans le cas où $n \geqslant 2$, définissons de plus les événements

$$A_1 = \{|R_1| \geqslant 3x\} \qquad \text{et} \qquad A_p = \left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant p-1} |R_i| < 3x\right\} \cap \{|R_p| \geqslant 3x\}$$

pour $p \in [\![2, n]\!]$.

Q 13. Exprimer l'événement A à l'aide des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Q 14. Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|R_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_p \cap \{|R_n| < x\}\right).$$

Q 15. Justifier que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on a l'inclusion

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}.$$

Q 16. En déduire que

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|R_n| \geqslant x\}\right) + \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|R_n - R_p| > 2x\}\right).$$

Q 17. Conclure.

II. Étude d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}$$

De plus, on définit la fonction $B_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par les conditions

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in \left]-\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, & B_n(x) = 0 \\
\forall k \in [\![0, n]\!], \forall x \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, & B_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \\
\forall x \in \left[\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[, & B_n(x) = 0
\end{array}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ, définie dans la partie I. Autrement dit, on souhaite montrer

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta_n = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|.$$

L'usage d'une figure pour appréhender la problématique de cette partie sera vivement apprécié.

II. A -

Q 18. Comparer les réels $-x_{n,k}$ et $x_{n,n-k}$.

Q 19. Justifier l'existence du réel Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 20. Montrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité

$$\Delta_n = \sup_{x \geqslant 0} |B_n(x) - \varphi(x)|$$

Q 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que B_n est une application décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On pourra distinguer selon que n est pair ou impair. Dans la suite de cette partie, on fixe $\varepsilon > 0$. La limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ assure de l'existence d'un nombre $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(\ell) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

II.B-

Dans cette sous-partie, on va montrer

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

On introduit pour cela l'ensemble

$$I_n = \{k \in [\![0, n]\!] \mid x_{n,k} \in [0, \ell + 1]\}$$

dont on peut vérifier que c'est un intervalle d'entiers.
Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que n et k varient de sorte que $k \in I_n$.

Q 22. Montrer que l'on a

$$k!(n-k)! = 2\pi \mathrm{e}^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

pour n tendant vers l'infini.
On pourra utiliser la formule de Stirling rappelée en début d'énoncé.

Q 23. En déduire que, pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$B_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}.$$

Q 24. En déduire que

$$B_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}$$

puis que

$$B_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Q 25. Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1$,

$$\sup_{x \in [0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

II.C-

Q 26. Pour tout $\ell > 0$, montrer qu'il existe un entier naturel n_2, tel que, pour tout $n \geqslant n_2$,

$$B_n(\ell) \leqslant 2\varphi(\ell)$$

Q 27. Conclure que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 .

III. Applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi que X. On définit alors

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. On admettra que pour tout $n \geqslant 1, S_n$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

III. A - Théorème central limite

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in N^*}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f également continue par morceaux sur I.

Q 28. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (respectivement $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est une suite de nombres réels appartenant à I qui converge vers $u \in I$ (respectivement $v \in I$), montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\mathrm{d}x \right) = \int_u^v f(x)\mathrm{d}x.$$

On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*, Y_i = \frac{X_i+1}{2}$ et $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

Q 29. Montrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}\left(\{T_n = j\}\right) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\mathrm{d}x$$

où $x_{n,j}$ a été défini dans la partie II.
Considérons un couple (u, v) de réels tel que $u < v$, et notons

$$J_n = \left\{ j \in [\![0, n]\!] \mid \frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leqslant j \leqslant \frac{n + v\sqrt{n}}{2} \right\}.$$

Q 30. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left\{ u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v \right\} \right) = \sum_{j\in J_n} \mathbb{P}\left(\{T_n = j\}\right).$$

Q 31. En déduire que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v \right\} \right) = \int_u^v \varphi(x)\mathrm{d}x$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right\} \right) = 1 - \Phi(u)$$

où les applications φ et Φ ont été définies dans la partie I.

III. B - Critère de tension

Dans cette dernière sous-partie, on fixe $\varepsilon \in]0, 1[$.

Q 32. Montrer qu'il existe $x_0 \geqslant 1$ tel que l'on ait

$$\forall x \geqslant x_0, \quad \exists n_x \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_x, \quad x^2\mathbb{P}\left(\left\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant \varepsilon.$$

Q 33. Pour x_0 et x comme à la question précédente, on fixe $N \geqslant \frac{n_x}{\varepsilon}$ et on choisit $n \geqslant N$. Montrer qu'alors

$$x^2\mathbb{P}\left(\left\{ \max_{1\leqslant p\leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n} \right\} \right) \leqslant 3\varepsilon$$