

Devoir surveillé n°4

MP Clemenceau 2024-25

Jeudi 19 décembre 2024

Vous avez 4 heures dans la joie et la bonne humeur mais en silence !!

Le sujet comporte deux problèmes au choix, un type CCINP et un type CentraleSupélec.

Il ne faut commencer et ne traiter qu'un seul problème.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations. Toute copie non rédigée ne sera pas corrigée. Il est demandé aux étudiants de mettre leurs nom et prénom sur chaque copie (double de préférence) et de numéroté ces dites copies.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.



Problème type CCINP

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a, b]$: si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

Partie 1. Exemples et contre-exemples

- 1) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1]$ par : $\forall x \in]0, 1], x \mapsto \frac{1}{x}$.

Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0, 1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

- 2) Soit N entier naturel non nul, on note $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[a, b]$, de degré inférieur ou égal à N . Justifier que $\mathcal{P}_n$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

- 3) Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}[X], N_1(P) = \sup_{x \in [-2, -1]} |P(x)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{x \in [1, 2]} |P(x)|$$

3.a) Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

3.b) On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2, 2]$ ainsi :

$$\text{pour tout } x \in [-2, -1], f(x) = x^2, \text{ pour tout } x \in [-1, 1], f(x) = 1 \text{ et pour tout } x \in [1, 2], f(x) = x^3$$

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2, 2]$.

Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2 .

Partie 2. Application : un théorème des moments

- 4) f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que pour tout entier naturel k , $\int_a^b x^k f(x) dx = 0$.

$\left(\int_a^b x^k f(x) dx \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a, b] \right)$.

4.a) Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\int_a^b P(x)f(x) dx$

4.b) Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur une partie I de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée sur I , alors la suite de fonctions $(f \cdot g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $f \cdot g$.

5) Application

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple (f, g) d'éléments de E par $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$.

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a, b]$ et l'orthogonal de F . Déterminer $F^\perp$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

6)

6.a) Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout n non nul,
$$I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}.$$

6.b) En déduire que, pour tout entier naturel k ,
$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x dx = 0.$$

6.c) Proposer une fonction f continue sur $[0, +\infty[$, non nulle et vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } k, \int_0^{+\infty} u^k f(u) du = 0$$

6.d) Expliquer pourquoi la fonction proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0, +\infty[$ par une suite de polynômes.

Partie 3. Exemple via un théorème de Dini

7) Question préliminaire

Soit $x \in [0, 1]$, on note $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in I$, $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence valable pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(x - (u_n)^2) = g_x(u_n)$$

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer, en fonction du réel x , sa limite.

8) Proposer un exemple de suite (f_n) de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge simplement mais non uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f qui est continue. Il sera possible de s'appuyer sur une représentation graphique sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on pourra admettre le résultat suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge simplement vers une fonction f elle-même continue sur $[a, b]$. Si la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire : pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [a, b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.

9) Application

Soit (P_n) la suite de fonctions polynômes définie par :

$$P_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2)$$

9.a) Justifier que la suite (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

9.b) Démontrer que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0, 1]$.

Dans toute cette partie, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0, 1]$.

On pose : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

10) S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

10.a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.

10.b) Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)$$

11)

11.a) Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a, b) \in [0, 1]^2$, $|a - b| \leq \alpha$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

11.b) Justifier que $\left| \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k) \right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.

11.c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout réel $x \in [0, 1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, puis conclure.

Problème de type CentraleSupélec

Notations

- Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.
- On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes.

I. Résultats préliminaires

I.A- Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

I.A.1)

- Q 1.** Montrer que $I_n \geq \frac{1}{2^n}$
- Q 2.** Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1 .
- Q 3.** Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

On pourra minorer $1+t^2$ par un polynôme de degré 1 .

- Q 4.** En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n \sim K_n$
- Q 5.** Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$.
- Q 6.** En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.A.2)

- Q 7.** Justifier que

$$\sqrt{n}I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} du$$

- Q 8.** Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

- Q 9.** En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \quad \text{puis de} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

I.B - Comportement asymptotique de $1 - \Phi$

Soit $x > 0$.

- Q 10.** En écrivant que $\varphi(t) \leq \frac{t}{x} \varphi(t)$ pour tout $t \geq x$, montrer que $\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}$.
- Q 11.** À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que $\frac{x}{x^2+1} \varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$
- Q 12.** En déduire un équivalent simple de $1 - \Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.C - Une inégalité maximale

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et $Z_1, \dots, Z_n$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $R_p = \sum_{i=1}^p Z_i$.
On va montrer la propriété

$$\forall x > 0, \quad \mathbb{P} \left(\left\{ \max_{1 \leq p \leq n} |R_p| \geq 3x \right\} \right) \leq 3 \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P} (\{|R_p| \geq x\})$$

On admet que les différentes fonctions intervenant dans cette inégalité sont bien des variables aléatoires discrètes. Pour simplifier, notons A l'événement $\left\{ \max_{1 \leq p \leq n} |R_p| \geq 3x \right\}$. Ainsi,

$$A = \left\{ \omega \in \Omega \mid \max_{1 \leq p \leq n} |R_p(\omega)| \geq 3x \right\}.$$

Dans le cas où $n \geq 2$, définissons de plus les événements

$$A_1 = \{|R_1| \geq 3x\} \quad \text{et} \quad A_p = \left\{ \max_{1 \leq i \leq p-1} |R_i| < 3x \right\} \cap \{|R_p| \geq 3x\}$$

pour $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

Q 13. Exprimer l'événement A à l'aide des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Q 14. Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq 3x\}) + \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < 3x\}).$$

Q 15. Justifier que pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a l'inclusion

$$A_p \cap \{|R_n| < 3x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}.$$

Q 16. En déduire que

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq 3x\}) + \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}).$$

Q 17. Conclure.

II. Étude d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}$$

De plus, on définit la fonction $B_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par les conditions

$$\begin{aligned} \forall x \in \left] -\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right[, & \quad B_n(x) = 0 \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket , \forall x \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right[, & \quad B_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \\ \forall x \in \left[\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right[, & \quad B_n(x) = 0 \end{aligned}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ , définie dans la partie I. Autrement dit, on souhaite montrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|.$$

L'usage d'une figure pour appréhender la problématique de cette partie sera vivement apprécié.

II. A -

- Q 18.** Comparer les réels $-x_{n,k}$ et $x_{n,n-k}$.
Q 19. Justifier l'existence du réel Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Q 20. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité

$$\Delta_n = \sup_{x \geq 0} |B_n(x) - \varphi(x)|$$

- Q 21.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que B_n est une application décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On pourra distinguer selon que n est pair ou impair. Dans la suite de cette partie, on fixe $\varepsilon > 0$. La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ assure de l'existence d'un nombre $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(\ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

II.B-

Dans cette sous-partie, on va montrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, \ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

On introduit pour cela l'ensemble

$$I_n = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid x_{n,k} \in [0, \ell + 1]\}$$

dont on peut vérifier que c'est un intervalle d'entiers.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que n et k varient de sorte que $k \in I_n$.

- Q 22.** Montrer que l'on a

$$k!(n-k)! = 2\pi e^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

pour n tendant vers l'infini.

On pourra utiliser la formule de Stirling rappelée en début d'énoncé.

- Q 23.** En déduire que, pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}.$$

- Q 24.** En déduire que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}$$

puis que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

- Q 25.** Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier $n \geq n_1$,

$$\sup_{x \in [0, \ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

II.C-

- Q 26.** Pour tout $\ell > 0$, montrer qu'il existe un entier naturel n_2 , tel que, pour tout $n \geq n_2$,

$$B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell)$$

- Q 27.** Conclure que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

III. Applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. On considère une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi que X . On définit alors

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

On dit que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. On admettra que pour tout $n \geq 1$, S_n est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

III. A - Théorème central limite

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f également continue par morceaux sur I .

Q 28. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (respectivement $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$) est une suite de nombres réels appartenant à I qui converge vers $u \in I$ (respectivement $v \in I$), montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{u_n}^{v_n} f_n(x) dx \right) = \int_u^v f(x) dx.$$

On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$ et $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Q 29. Montrer que, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(\{T_n = j\}) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x) dx$$

où $x_{n,j}$ a été défini dans la partie II.

Considérons un couple (u, v) de réels tel que $u < v$, et notons

$$J_n = \left\{ j \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leq j \leq \frac{n + v\sqrt{n}}{2} \right\}.$$

Q 30. Justifier que

$$\mathbb{P} \left(\left\{ u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v \right\} \right) = \sum_{j \in J_n} \mathbb{P}(\{T_n = j\}).$$

Q 31. En déduire que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left\{ u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v \right\} \right) = \int_u^v \varphi(x) dx$$

puis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left\{ u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right\} \right) = 1 - \Phi(u)$$

où les applications φ et Φ ont été définies dans la partie I.

III. B - Critère de tension

Dans cette dernière sous-partie, on fixe $\varepsilon \in]0, 1[$.

Q 32. Montrer qu'il existe $x_0 \geq 1$ tel que l'on ait

$$\forall x \geq x_0, \quad \exists n_x \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_x, \quad x^2 \mathbb{P}(\{|S_n| \geq x\sqrt{n}\}) \leq \varepsilon.$$

Q 33. Pour x_0 et x comme à la question précédente, on fixe $N \geq \frac{n_x}{\varepsilon}$ et on choisit $n \geq N$. Montrer qu'alors

$$x^2 \mathbb{P} \left(\left\{ \max_{1 \leq p \leq n} |S_p| \geq 3x\sqrt{n} \right\} \right) \leq 3\varepsilon$$